Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1901

§. 31. Die Zusatzkräfte bei der Relativbewegung wobei im letzten Gliede die Relativgeschwindigkeit an Stelle der ihr gleichen Differenz $\frac{d\mathfrak{r}_1}{\tau} - \frac{d\mathfrak{p}_1}{\tau}$ eingeführt ist. — Hiermit ist der Satz von Coriolis von Neuem bewiesen.

§ 31. Die Zusatzkräfte bei der Relativbewegung.

Für den im Fahrzeuge stehenden Beobachter ist das Trägheitsgesetz und die dynamische Grundgleichung nicht erfüllt, wenn er nur die thatsächlich an dem bewegten Punkte angreifenden Kräfte ins Auge fasst. Als „thatsächlich angreifende" oder „physikalisch existirende" Kräfte sind hierbei jene bezeichnet, die auch für den im festen Raume aufgestellten Beobachter nachweisbar sind. Mit der dynamischen Grundgleichung würden aber auch alle anderen Folgerungen der Dynamik hinfällig werden. Um die Lehren der Dynamik auch für den im Fahrzeuge aufgestellten Beobachter, der von der absoluten Bewegung seines Fahrzeuges gar keine Notiz nimmt, anwendbar zu machen, kann man [aber den Kunstgriff benützen, an dem bewegten Punkte B Zusatzkräfte von der Art anzubringen, dass nachher die dynamische Grundgleichung auch für den bewegten Raum gültig bleibt. Dies ist leicht zu erreichen. Man multiplicire Gl. (163) mit der Masse m des bewegten Punktes. Dann wird

$$m\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = m\frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2} - m\frac{d^2\mathfrak{p}_a}{dt^2} - 2m\mathsf{V}\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\mathfrak{u}. \tag{164}$$

Das erste Glied auf der rechten Seite stellt nach dem dynamischen Grundgesetze die „physikalisch existirende" Kraft $\mathfrak{P}$ an dem materiellen Punkte (oder die Resultirende, wenn mehrere vorkommen,) dar. Die beiden anderen Glieder müssen, wenn wir die dynamische Grundgleichung auch für die Relativbewegung aufrecht erhalten wollen, ebenfalls als Kräfte gedeutet werden. Diese Kräfte sollen als „erste" und „zweite" Zusatzkraft bezeichnet werden.

Die erste Zusatzkraft ist jene, die schon beim d'Alembert'schen Princip vorkam. In der That hängt ja der Fall der Relativbewegung in sehr einfacher Weise mit dem d'Alembert'schen Princip zusammen. Wenn sich ein starrer Körper bewegt, sind alle materiellen Punkte im Gleichgewichte (und in Ruhe) relativ zu einem auf dem starren Körper selbst aufgestellten Beobachter. Für diesen Beobachter müssen daher, wenn er die Lehren der Mechanik auf seinen Raum bezieht, alle an dem starren Körper angreifenden Kräfte ein Gleichgewichtssystem mit einander bilden. Er muss aber dann, wie wir schon früher auf anderem Wege und jetzt von Neuem fanden, ausser den physikalisch existirenden Kräften auch die „Trägheitskräfte" $\mathfrak{H}$, nämlich

$$\mathfrak{H} = - m \frac{d^2 \mathfrak{p}}{dt^2}$$

anbringen. Bei dieser Anwendung von Gl. (164) fallen nämlich, da keine Relativbewegungen vorkommen, die Differentialquotienten von $\mathfrak{r}$ fort. Behalten wir die frühere Bezeichnung für die „Trägheitskräfte" auch hier bei, so geht Gl. (164) über in

$$m \frac{d^2 \mathfrak{r}}{dt^2} = \mathfrak{P} + \mathfrak{H} - 2m \mathrm{V} \mathfrak{v} \mathfrak{u}, \tag{165}$$

wobei noch der Kürze halber die Relativgeschwindigkeit des bewegten Punktes mit $\mathfrak{v}$ bezeichnet ist.

Die Anwendung von Gl. (165) soll zunächst an dem Beispiele des fallenden Steines gezeigt werden. An einem materiellen Punkte, den wir von der Erde aus beobachten, wirken zunächst von physikalisch existirenden Kräften die Anziehung der Erde, der Sonne und aller anderen Weltkörper, die wir uns zu einer Resultirenden $\mathfrak{P}_0$ zusammengefasst denken. Ferner können noch andere physikalisch existirende Kräfte, wie Luftwiderstand, Widerstand einer Bahn, überhaupt Druck von Seiten eines anderen Körpers, elektrische Anziehung o. dgl. daran angreifen, deren Resultirende $\mathfrak{P}_1$ sei, so dass $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_0 + \mathfrak{P}_1$ ist. Wenn der Punkt an seinem Orte auf der Erde unter der Einwirkung aller dieser Kräfte festgehalten werden soll, muss nach Gl. (165)

$$0 = \mathfrak{P}_0 + \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{H} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{P}_1 = -(\mathfrak{P}_0 + \mathfrak{H})$$

sein. Hieraus wird die Bedeutung von $\mathfrak{P}_0 + \mathfrak{H}$ klar, denn wir wissen, dass wir an einem materiellen Punkte, an dem andere physikalisch existirende Kräfte nicht angreifen, eine dem Gewichte des Punktes entgegengesetzt gleiche Kraft $\mathfrak{P}_1$ anbringen müssen, um ihn an seiner Stelle auf der Erde festzuhalten. Die Summe $\mathfrak{P}_0 + \mathfrak{H}$ ist daher selbst das Gewicht des Körpers, das mit $\mathfrak{G}$ bezeichnet werden soll. Hiermit geht Gl. (165) über in

$$m \frac{d^2 \mathfrak{r}}{dt^2} = \mathfrak{G} + \mathfrak{P}_1 - 2m \mathrm{V}\, \mathfrak{v}\mathfrak{u}. \tag{166}$$

Wenn die von der Erde her gesehenen Bewegungen in Uebereinstimmung mit den auf den festen Raum bezogenen Lehren der Mechanik stehen sollen, müssen wir uns daher ausser dem Gewichte $\mathfrak{G}$ und anderen auch von der Erde her nachweisbaren Kräften $\mathfrak{P}_1$ noch die „zweiten Zusatzkräfte“ $-2m \mathrm{V}\, \mathfrak{v}\mathfrak{u}$ daran angebracht denken. Die zweite Zusatzkraft ist aber hier unter gewöhnlichen Umständen sehr gering wegen der kleinen Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ der Drehung der Erde gegen den festen Raum und hiervon allein kommt es, dass man in der Mehrzahl der Fälle von der Eigenbewegung der Erde ganz absehen, die Bewegungen relativ zur Erde also ohne Weiteres als Absolutbewegungen betrachten kann. Ein Zahlenbeispiel möge dies noch zeigen. Die Erde dreht sich in einem Sterntage einmal um ihre Axe und voraussichtlich ist diese Winkelgeschwindigkeit als jene gegen den absoluten Raum aufzufassen. Ein Sterntag unterscheidet sich aber nicht viel von einem Sonnentage und man pflegt daher bei solchen Rechnungen die Winkelgeschwindigkeit der Einfachheit wegen auf den Sonnentag zu beziehen. Dann ist

$$u = \frac{2\pi}{86400} \sec^{-1} = \frac{1}{13760} \sec^{-1}.$$

Wenn die Relativgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ etwa $10\,\mathrm{m}\sec^{-1}$ beträgt, und senkrecht zur Erdaxe steht (also bei jener Richtung, in der das äussere Produkt seinen grössten Werth annimmt) erhält man für die zweite Zusatzkraft den Werth

$$m \cdot \frac{20\,\mathrm{m\,sec}^{-1}}{13760} \cdot \mathrm{sec}^{-1} \quad \text{oder} \quad m \cdot \frac{1}{688}\,\mathrm{m\,sec}^{-2}.$$

Das Gewicht von m ist $m \cdot 9{,}81\,\mathrm{m\,sec}^{-2}$; die zweite Zusatzkraft beträgt daher rund $\frac{1}{7000}$ des Gewichtes, ist also unter gewöhnlichen Umständen unmerklich.

Lassen wir bei dem fallenden Steine den Luftwiderstand ausser Berücksichtigung, so ist $\mathfrak{P}_1 = 0$ zu setzen und die Differentialgleichung der Fallbewegung lautet

$$m\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \mathfrak{G} - 2m\,V\mathfrak{v}\mathfrak{u},$$

oder, wenn wir an Stelle des Gewichtes das Produkt aus Masse und Fallbeschleunigung $\mathfrak{g}$ einführen,

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \mathfrak{g} - 2\,V\mathfrak{v}\mathfrak{u}. \tag{167}$$

Gewöhnlich vernachlässigt man das zweite Glied der rechten Seite gegenüber $\mathfrak{g}$. Dann wird $\mathfrak{v} = \mathfrak{g}t$, wenn man die Zeit t von Beginn der Fallbewegung an rechnet. Es wird daher, um eine bessere Annäherung zu erhalten, genügen, wenn man im Correctionsgliede $\mathfrak{v} = \mathfrak{g}t$ setzt. Der damit begangene Fehler ist jedenfalls erst von höherer Ordnung klein, als die Abweichung von dem Falle in lothrechter Richtung; es ist daher für unsere Zwecke nicht nöthig, die Differentialgleichung (167) streng zu integriren. Wir können sie vielmehr genau genug ersetzen durch

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \mathfrak{g} - 2t\,V\mathfrak{g}\mathfrak{u}$$

und durch Integration erhält man daraus, wenn die Radienvektoren $\mathfrak{r}$ von der Ausgangsstelle der Fallbewegung aus gerechnet werden,

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{g}\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}V\mathfrak{g}\mathfrak{u}. \tag{168}$$

Das letzte Glied ist das Correctionsglied. Das äussere Produkt aus $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{u}$ ist gleich $ug\cos\varphi$, wenn φ die geographische Breite des Ortes der Erde ist, an dem der Versuch angestellt wird. Die Richtung von $V\mathfrak{g}\mathfrak{u}$ steht senkrecht zu $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{u}$, ist also horizontal und nach Westen hin gekehrt. Wegen des negativen Vorzeichens stellt daher das Correctionsglied eine östliche Abweichung des fallenden Steins aus der Lothrichtung dar. Am grössten wird die Abweichung am Aequator, weil dort $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{u}$ senkrecht zu einander stehen und $\cos\varphi = 1$ ist. Aber auch dort ist sie nur gering. Selbst bei $t = 10$ sec Fallzeit erreicht das Correctionsglied erst die Grösse

$$\frac{1000\ \mathrm{sec}^3}{3} \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}^2} \cdot \frac{1}{13760}\ \mathrm{sec}^{-1} = 0{,}238\ \mathrm{m},$$

während der in dieser Zeit in lothrechter Richtung zurückgelegte Weg bei Ausserachtlassung des Luftwiderstandes gegen 500 m beträgt.

Man hat früher öfters darüber gestritten, ob der fallende Stein auch eine Ablenkung in der Nord-Südrichtung erfahren müsse. Unsere Formeln lassen eine solche nicht erkennen, denn das Correctionsglied hat auch in der Differentialgleichung (167) keine Componente, die parallel zu $\mathfrak{u}$ wäre. Man muss aber beachten, dass wir $\mathfrak{g}$ als eine Constante behandelt haben, während in Wirklichkeit $\mathfrak{g}$ an jedem Orte der Bahn etwas (wenn auch sehr wenig) verschieden ist. Hierbei ist namentlich zu beachten, dass das Gewicht $\mathfrak{G}$ den Summanden $\mathfrak{H}$ enthält, der in verschiedenen Höhen etwas verschieden ist. Wenn man eine Kraftlinie zieht, deren Richtung überall mit der Richtung von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{g}$ zusammenfällt, hat diese schon selbst eine geringe Krümmung in der Meridianebene, vorausgesetzt, dass man sich weder am Pole noch am Aequator befindet. Hiermit hängt es zusammen, dass auch eine Nord-Südabweichung des fallenden Steines herausgerechnet werden kann. Diese hat aber mit der Relativbewegung an sich nichts zu thun; die Erddrehung hängt damit nur insofern zusammen, als die „erste Zusatzkraft“ $\mathfrak{H}$ davon abhängig ist.

Eng verwandt mit der Seitenablenkung des fallenden Steins ist auch die eines Geschosses. Wenn ein Geschütz z. B. in der Richtung nach Norden hin abgefeuert wird, tritt wegen der Erddrehung eine seitliche Ablenkung des Geschosses nach

Osten hin ein. Schiesst man nach Süden, so ist die Seitenablenkung westlich, d. h. in beiden Fällen nach rechts vom Schützen aus gesehen. Vorausgesetzt wird dabei, dass man sich auf der nördlichen Halbkugel befinde; am Aequator ist die Ablenkung Null und auf der südlichen Halbkugel entgegengesetzt. Auch wenn man nach Osten oder Westen hin schiesst, hat man stets eine Ablenkung nach rechts hin vom Geschütze aus gesehen. Auch der Betrag dieser Ablenkung kann unter Voraussetzung einer flachen Flugbahn leicht berechnet werden. Wenn sich das Geschoss z. B. nach Norden mit einer Geschwindigkeit von 350 m sec^{-1} ungefähr in horizontaler Richtung bewegt, ist in der geographischen Breite φ die zweite Zusatzkraft von der Grösse

$$m \cdot 700 \cdot \frac{1}{13760} \sin \varphi$$

anzubringen, wofür rund $\frac{Q}{200} \sin \varphi$ gesetzt werden kann, wenn Q das Geschossgewicht ist. Eine constante Kraft von dieser Grösse bringt z. B. während einer Flugzeit von 20 sec nach den Formeln für die gleichförmig beschleunigte Bewegung einen in ihre Richtung fallenden Weg von rund

$$10 \text{m} \cdot \sin \varphi \quad \text{oder von} \quad 7{,}7 \text{ m}$$

zu Stande, wenn $\varphi = 50^0$ gesetzt wird. Wenn es verlangt wird, kann man die Rechnung natürlich auch noch genauer durchführen; es sollte sich jetzt nur um eine Abschätzung handeln.

Beträchtlich wird die Zusatzkraft, wenn man die Bahn eines zur Erde fallenden Meteorsteines betrachtet, weil es sich in diesem Falle um sehr grosse Geschwindigkeiten handelt. Natürlich kann man aber in diesem Falle von der Betrachtung der Relativbewegung zur Erde auch ganz absehen und die Bewegung vom absoluten Raume her betrachten.

Auch an einem schnell umlaufenden Schwungrade wirkt wegen der Erddrehung ein freilich bei den praktisch vorkommenden Geschwindigkeiten nur sehr geringfügiges Kräftepaar der „zweiten Zusatzkräfte“, das leicht berechnet werden kann. Es kann übrigens auch nach den in § 25 gegebenen Anleitungen sofort ermittelt werden, denn das Schwungrad wird von der Erde bei ihrer Bewegung im absoluten Raume genau ebenso mitgenommen wie der dort betrachtete Schwungring, der auf einer Lokomotive gelagert sein sollte.

Aus der dynamischen Grundgleichung sind alle übrigen Sätze der Mechanik, soweit sie nicht an und für sich für jeden Aufstellungsort des Beobachters gültig sind, abgeleitet worden. Sobald wir daher durch Einführung der Zusatzkräfte Sorge dafür tragen, dass die dynamische Grundgleichung auch für die Bewegungen relativ zur Erde erfüllt bleibt, können wir auch alle daraus abgeleiteten Folgerungen ohne weiteren Beweis anwenden, d. h. die Gültigkeit der zunächst auf den absoluten Raum bezogenen Betrachtungen der Mechanik wird damit auch für den auf der Erde fussenden Beobachter gerettet. Nützlich ist es zwar immerhin, noch ausdrücklich einen Vergleich darüber anzustellen, wie sich die Untersuchung gestaltet, jenachdem man vom absoluten Raume oder von der festen Erde ausgeht. Namentlich über die lebendige Kraft, auf den absoluten Raum und relativ zur Erde bezogen, lassen sich manche interessante Betrachtungen anstellen; ich muss mir es aber versagen, hier weiter darauf einzugehen.

Selbstverständlich bleiben übrigens die bisher auf die Bewegung relativ zur Erde bezogenen Betrachtungen ohne Weiteres auch für die Bewegungen relativ zu irgend einem anderen Fahrzeuge anwendbar. Man kann also z. B. die Wasserbewegung im Laufrade einer Turbine genau so untersuchen, als wenn das Laufrad ruhte, falls man nur die beiden Zusatzkräfte an jedem Wassertheilchen anbringt. Die erste Zusatzkraft reducirt sich übrigens in diesem Falle auf die Centrifugalkraft. Beide Zusatzkräfte erlangen hier sehr grosse Werthe wegen der grossen Winkelgeschwindigkeit u, die viele Tausende mal grösser ist als die Winkelgeschwindigkeit der Erde.
