Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1901

§. 30. Andere Ableitung des Satzes von Coriolis

urn:nbn:de:hbz:466:1-84695

§ 30. Andere Ableitung des Satzes von Coriolis.

Das im vorigen Paragraphen eingeschlagene Verfahren zur Ableitung des Zusammenhanges zwischen Relativ- und Absolutbeschleunigung ist, obschon die Betrachtung in der Neuauflage gegen früher wesentlich vereinfacht worden sein dürfte, doch immer noch ziemlich abstrakt gehalten. Es erscheint daher auch jetzt noch wünschenswerth, eine anschaulichere Ableitung kennen zu lernen, die geringere Mühe macht.

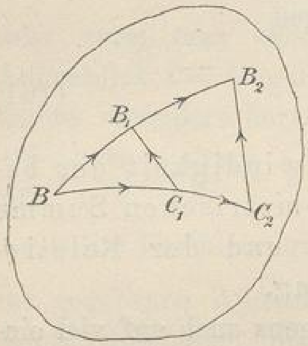

Abb. 55.

Hierzu wollen wir uns zunächst nach einem Mittel umsehen, durch das man die Beschleunigung einer Bewegung in möglichst einfacher Art ableiten kann. Man betrachte zwei aufeinanderfolgende kleine Zeittheilchen von der gleichen Dauer τ. Der absolute Weg eines Punktes, der zu Anfang den Abstand $\mathfrak{s}_0$ von einem festen Anfangspunkte hatte, sei $d\mathfrak{s}_1$ im ersten und $d\mathfrak{s}_2$ im zweiten Zeittheilchen. Dann kann man nach der Taylor'schen Entwickelung

$$d\mathfrak{s}_1 = \tau\left(\frac{d\mathfrak{s}}{dt}\right)_0 + \frac{\tau^2}{2}\left(\frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2}\right)_0 + \cdots$$

$$d\mathfrak{s}_1 + d\mathfrak{s}_2 = 2\tau\left(\frac{d\mathfrak{s}}{dt}\right)_0 + \frac{(2\tau)^2}{2}\left(\frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2}\right)_0 + \cdots$$

setzen. Die Differenz der Wege $d\mathfrak{s}_1$ und $d\mathfrak{s}_2$ ist daher

$$d\mathfrak{s}_2 - d\mathfrak{s}_1 = \tau^2\left(\frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2}\right)_0 + \cdots.$$

Die Glieder höherer Ordnung können weggelassen werden und man erhält daher

$$\left(\frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2}\right)_0 = \frac{d\mathfrak{s}_2 - d\mathfrak{s}_1}{\tau^2} = \frac{(d\mathfrak{s}_1 + d\mathfrak{s}_2) - 2d\mathfrak{s}_1}{\tau^2}. \tag{162}$$

Nun sei BB_1B_2 in Abb. 55 der absolute Weg eines beweglichen Punktes B und BC_1C_2 der absolute Weg jenes Punktes des Fahrzeugs, mit dem B anfänglich zusammenfiel.

In Anlehnung an die früher gebrauchten Bezeichnungen setzen wir zugleich

$$BB_1 = d\mathfrak{s}_1; \quad B_1B_2 = d\mathfrak{s}_2; \quad BC_1 = d\mathfrak{p}_1; \quad C_1C_2 = d\mathfrak{p}_2.$$

Die Strecken C_1B_1 und C_2B_2 geben die relativen Wege von B gegen das Fahrzeug an, so wie sie vom festen Raume aus gesehen erscheinen. Man hat dafür

$$C_1B_1 = d\mathfrak{s}_1 - d\mathfrak{p}_1; \quad C_2B_2 = d\mathfrak{s}_1 + d\mathfrak{s}_2 - d\mathfrak{p}_1 - d\mathfrak{p}_2.$$

Die Relativbeschleunigung von B ist aus dem Vergleiche der Wege C_1B_1 und C_2B_2 nach der durch Gl. (162) gegebenen Anleitung zu berechnen. Dabei müssen wir aber beachten, dass der Beobachter, der diese Wege mit einander vergleicht, im Fahrzeuge selbst aufgestellt sein muss. Markirt dieser Beobachter die Punkte C_1 und B_1 nach dem ersten Zeittheilchen im Fahrzeuge, so führt die Strecke C_1B_1 des Fahrzeugs während des zweiten Zeittheilchens selbst noch eine Bewegung aus, von der nur die Drehung um $\mathfrak{u}\tau$ in Frage kommt. Da nun C_2B_2 so gezeichnet ist, wie es der Lage nach Ablauf des zweiten Zeittheilchens entspricht, so müssen wir, um beide Strecken auch für den innen stehenden Beobachter, der sich nach dieser zweiten Lage orientirt, vergleichbar mit einander zu machen, an Stelle von C_1B_1 die Strecke

$$d\mathfrak{s}_1 - d\mathfrak{p}_1 + \tau \mathrm{V}(d\mathfrak{s}_1 - d\mathfrak{p}_1)\mathfrak{u}$$

setzen. Für die Relativbeschleunigung soll kein neuer Buchstabe mehr eingeführt werden; wir behalten vielmehr die frühere Bezeichnung $\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}$ bei und erhalten dafür nach Analogie mit Gl. (162)

$$\tau^2\left(\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}\right)_0 = d\mathfrak{s}_1 + d\mathfrak{s}_2 - d\mathfrak{p}_1 - d\mathfrak{p}_2 - 2\{d\mathfrak{s}_1 - d\mathfrak{p}_1 + \tau\mathrm{V}(d\mathfrak{s}_1 - d\mathfrak{p}_1)\mathfrak{u}\}$$

$$\left(\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}\right)_0 = \frac{d\mathfrak{s}_2 - d\mathfrak{s}_1}{\tau^2} - \frac{d\mathfrak{p}_2 - d\mathfrak{p}_1}{\tau^2} - 2\,\mathrm{V}\left(\frac{d\mathfrak{s}_1}{\tau} - \frac{d\mathfrak{p}_1}{\tau}\right)\mathfrak{u}$$

$$= \left(\frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2}\right)_0 - \left(\frac{d^2\mathfrak{p}}{dt^2}\right)_0 - 2\,\mathrm{V}\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\mathfrak{u}, \qquad (163)$$

wobei im letzten Gliede die Relativgeschwindigkeit an Stelle der ihr gleichen Differenz $\frac{d\mathfrak{r}_1}{\tau} - \frac{d\mathfrak{p}_1}{\tau}$ eingeführt ist. — Hiermit ist der Satz von Coriolis von Neuem bewiesen.

§ 31. Die Zusatzkräfte bei der Relativbewegung.

Für den im Fahrzeuge stehenden Beobachter ist das Trägheitsgesetz und die dynamische Grundgleichung nicht erfüllt, wenn er nur die thatsächlich an dem bewegten Punkte angreifenden Kräfte ins Auge fasst. Als „thatsächlich angreifende“ oder „physikalisch existirende“ Kräfte sind hierbei jene bezeichnet, die auch für den im festen Raume aufgestellten Beobachter nachweisbar sind. Mit der dynamischen Grundgleichung würden aber auch alle anderen Folgerungen der Dynamik hinfällig werden. Um die Lehren der Dynamik auch für den im Fahrzeuge aufgestellten Beobachter, der von der absoluten Bewegung seines Fahrzeuges gar keine Notiz nimmt, anwendbar zu machen, kann man [aber den Kunstgriff benützen, an dem bewegten Punkte B Zusatzkräfte von der Art anzubringen, dass nachher die dynamische Grundgleichung auch für den bewegten Raum gültig bleibt. Dies ist leicht zu erreichen. Man multiplicire Gl. (163) mit der Masse m des bewegten Punktes. Dann wird

$$m \frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = m \frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2} - m \frac{d^2\mathfrak{p}_1}{dt^2} - 2m\mathrm{V}\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\mathfrak{u}. \tag{164}$$

Das erste Glied auf der rechten Seite stellt nach dem dynamischen Grundgesetze die „physikalisch existirende“ Kraft $\mathfrak{P}$ an dem materiellen Punkte (oder die Resultirende, wenn mehrere vorkommen,) dar. Die beiden anderen Glieder müssen, wenn wir die dynamische Grundgleichung auch für die Relativbewegung aufrecht erhalten wollen, ebenfalls als Kräfte gedeutet werden. Diese Kräfte sollen als „erste“ und „zweite“ Zusatzkraft bezeichnet werden.

Die erste Zusatzkraft ist jene, die schon beim d'Alembert'schen Princip vorkam. In der That hängt ja der Fall