Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1901

§. 29. Der Satz von Coriolis

urn:nbn:de:hbz:466:1-84695

Dritter Abschnitt.

Die Relativbewegung.

§ 29. Der Satz von Coriolis.

Vom Begriffe der Relativbewegung ist schon im ersten Bande wiederholt Gebrauch gemacht worden und ich kann hier als bekannt voraussetzen, was damals hierüber ermittelt wurde. Bei jenen früheren Gelegenheiten erstreckte sich indessen die Untersuchung immer nur auf den Fall, dass das Fahrzeug, von dem aus die Bewegung des materiellen Punktes oder des Körpers beobachtet werden sollte, nur eine Translationsbewegung und keine Drehung ausführte. Es macht sich daher jetzt noch eine Ergänzung erforderlich für den Fall, dass sich das Fahrzeug in ganz beliebiger Weise bewegt.

Zuvor sei aber noch auseinandergesetzt, zu welchem Zwecke und für welchen Gebrauch die hier vorzunehmenden Untersuchungen bestimmt sind. Bei den meisten Aufgaben der Dynamik hat man gar keine Veranlassung, Relativbewegungen ins Auge zu fassen; man löst sie am einfachsten, wenn man sich den Beobachter im festen Raume aufgestellt denkt: also in einem Raume, für den das Trägheitsgesetz erfüllt ist. Bei den vorausgehenden Untersuchungen dieses Bandes ist dies auch stets geschehen. In manchen Fällen vermag man aber entweder überhaupt nicht gut die Untersuchung der Bewegung von einem Fahrzeuge aus zu vermeiden oder man würde wenigstens, wenn die Vermeidung auch möglich wäre, auf erhebliche Vereinfachungen verzichten müssen, die durch die Hereinziehung der Relativbewegungen erzielt werden können.

Kaum zu vermeiden ist die Betrachtung der Relativbewegung bei solchen irdischen Bewegungsvorgängen, die von der Eigenbewegung des Erdballs gegen den festen Raum merklich beeinflusst sind. Diese Fälle sind freilich selten; gewöhnlich braucht man auf die Eigenbewegung der Erde nicht zu achten, kann vielmehr das Trägheitsgesetz, wie es auch bisher stillschweigend schon immer geschehen ist, als gültig in Bezug auf den von der Erde her ausgemessenen Raum betrachten. Dadurch wird man aber der Verpflichtung natürlich nicht enthoben, eine genauere Untersuchung anzustellen, um sich zu überzeugen, inwieweit die Vernachlässigung zulässig ist und um für jene Fälle, in denen sie nicht mehr zulässig ist, eine andere geeignete Untersuchungsmethode ausfindig zu machen.

So erwähnte ich z. B. schon früher einmal, dass ein Stein nicht genau in einer lothrechten graden Linie zur Erde fällt, sondern dass sich wegen der Drehung der Erde gegen den festen Raum, in dem das Trägheitsgesetz gilt, eine Seitenablenkung einstellt, die freilich sehr gering und nur durch die genauesten Versuche nachweisbar ist. Freilich steht nichts im Wege, selbst in solchen Fällen den Beobachtungsposten im festen Raume zu wählen, von hier aus die absolute Bahn des fallenden Steins zu ermitteln und dann erst nachträglich unter Berücksichtigung der Eigenbewegung der Erde den „relativen“ oder „scheinbaren“ Weg des Steins gegen die Erde, für den wir uns interessiren, und der allein unmittelbar beobachtet werden kann, daraus abzuleiten. Ein solches Verfahren wäre aber sehr umständlich. Ausserdem sind wir auch in der Mechanik der irdischen Bewegungsvorgänge so sehr darauf angewiesen, die Erde selbst als Aufstellungsort des Beobachters zu wählen, dass man auch in solchen Ausnahmefällen nicht darauf verzichten möchte. Die nachfolgenden Betrachtungen werden uns zeigen, wie man die früheren Untersuchungen nöthigenfalls zu ergänzen hat, um den irdischen Standpunkt unter allen Umständen festhalten zu können.

Bei einer anderen Classe von Problemen liegt zwar keine so dringende Nöthigung vor, auf die Relativbewegungen einzugehen; man erleichtert die Untersuchung aber auch bei ihnen oft sehr erheblich, wenn man davon Gebrauch macht. Hierher gehören namentlich die Flüssigkeitsbewegungen, die im Innern einer Centrifugentrommel oder im Laufrade einer Turbine vor sich gehen. Die Eigenbewegung der Erde kommt hierbei übrigens nicht in Frage; man kann vielmehr ohne Bedenken die von der festen Erde her gesehenen Bewegungen dabei als absolute auffassen. Betrachtet man aber die Flüssigkeitsströmungen in der rotirenden Trommel als Relativbewegungen gegen das Gefäss, so führt man die Aufgabe auf Wasserbewegungen in ruhenden Gefässen zurück, also auf einfachere Betrachtungen, die schon früher erledigt wurden. Auch hierüber, wie dies möglich ist, soll unsere Untersuchung Aufschluss geben.

Um die aufgezählten Aufgaben lösen zu können, müssen wir die Wege, die Geschwindigkeiten, die Beschleunigungen und die Kräfte im bewegten Raume mit jenen vergleichen, die vom absoluten Raume her festgestellt werden. Die Massen der bewegten Körper sind als Eigenschaften dieser Körper und daher in beiden Fällen als gleich anzusehen. Von den Kräften gilt dies aber nicht; wir müssen vielmehr von vornherein erwarten, dass an dem Körper, dessen Bewegung untersucht werden soll, noch andere Kräfte angebracht werden müssen, wenn die Bewegung auf ein bewegtes Fahrzeug, als wenn sie auf den festen Raum bezogen werden soll, für den das Trägheitsgesetz gilt. — Ausser den schon aufgezählten werden auch noch andere dynamische Grössen, wie Arbeiten, statische Momente, Antriebe, lebendige Kräfte u. s. f. in Betracht zu ziehen sein; wir können aber von diesen einstweilen absehen, da sie aus den zuerst angeführten später leicht abgeleitet werden können.*)

Die Lage des Fahrzeugs F und des bewegten Punktes B sei zur Zeit $t = 0$ durch Abb. 54 gegeben. Nach einer kleinen

*) Die nachfolgende Entwickelung ist in der neuen Auflage vollständig umgearbeitet werden.

Zeit τ haben sich beide etwas verschoben. Um die hierbei eintretende Relativbewegung von B gegen F in der einfachsten Weise beschreiben zu können, denken wir uns F aus jeder späteren Lage, die wir ins Auge fassen wollen, sammt dem darin festgehaltenen B wieder in die Anfangslage von F zurückgebracht. In der Zeichnung der Anfangslage des Fahrzeugs erhalten wir dadurch eine Reihe von späteren Lagen des Punktes B, deren Aufeinanderfolge die relative Bahn von B angiebt, also jene Bahn, die ein im Fahrzeuge selbst aufgestellter Beobachter, der sich um die Eigenbewegung des Fahrzeugs nicht kümmert, wahrnimmt.

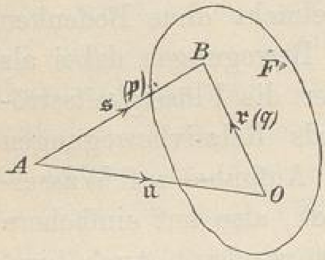

Abb. 54.

Wir wählen einen Anfangspunkt A im festen Raume und einen Anfangspunkt O auf dem Fahrzeuge aus. Von A aus ziehen wir einen Radiusvektor $\mathfrak{s}$ nach dem Punkte B und zwar nach jener Stelle des festen Raumes, die von B zur gegebenen Zeit eingenommen wird, so dass die Veränderung, die $\mathfrak{s}$ im Laufe der Zeit erfährt, die absolute Bewegung von B angiebt. Ausserdem denken wir uns von A aus noch einen zweiten Radiusvektor $\mathfrak{p}$ gezogen, der in der Anfangslage mit $\mathfrak{s}$ zusammenfällt, späterhin aber stets nach jenem Punkte des Fahrzeugraumes hingeht, mit dem B anfänglich zusammenfiel. Wir können sagen, dass durch die Aenderung von $\mathfrak{p}$ mit der Zeit die Fahrzeugbewegung beschrieben wird, wobei natürlich nur an jene Bewegung gedacht wird, die das Fahrzeug grade in jener Gegend besitzt, in der sich der Punkt B befindet. Dann ziehen wir von A aus noch einen Radiusvektor $\mathfrak{a}$ nach dem auf dem Fahrzeuge ausgewählten Anfangspunkte O. Die Veränderung, die $\mathfrak{a}$ in der Zeit erfährt, giebt die Fahrzeugbewegung in der Umgebung des Punktes O an.

Endlich ziehen wir noch von O aus einen Radiusvektor nach B, der je nach der Art, wie er gerechnet wird, mit $\mathfrak{r}$ oder mit $\mathfrak{q}$ bezeichnet werden soll. Wenn wir nämlich nur die Relativbewegung von B gegen das Fahrzeug angeben wollen, halten wir, wie es vorher schon beschrieben wurde, das Fahrzeug in der Anfangslage fest und geben die späteren Lagen von B gegen das Fahrzeug in dieser Stellung an. Der unter dieser Voraussetzung von O nach B gezogene Radiusvektor sei $\mathfrak{r}$; er ist demnach ebenfalls ein auf den festen Raum bezogener Vektor. Soll dagegen ausser der Bewegung von B gegen das Fahrzeug auch noch auf die Fahrzeugbewegung selbst geachtet werden, so wird der von O nach B gezogene Radiusvektor mit $\mathfrak{q}$ bezeichnet. Hiernach sind $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}$ jederzeit von gleicher Grösse und auch von relativer Richtung und Lage gegen das Fahrzeug. Dagegen haben sie verschiedene Richtungen und Lagen gegen den festen Raum und zwar derart, dass $\mathfrak{q}$ mit dem auf denselben Augenblick bezogenen $\mathfrak{r}$ durch Zurückdrehen des Fahrzeugs in die Anfangslage zum Zusammenfallen gebracht werden kann.

Auch dann, wenn sich der Punkt B gar nicht relativ zum Fahrzeuge bewegt, wenn also $\mathfrak{r}$ constant ist, verändert sich $\mathfrak{q}$ mit der Zeit und wir wollen zunächst berechnen, was dann aus $\mathfrak{q}$ nach Ablauf einer kleinen Zeit τ wird, wenn der mit $\mathfrak{r}$ zusammenfallende Anfangswerth $\mathfrak{q}_0$ und die Fahrzeugbewegung gegeben sind. Da $\mathfrak{q}$ hier als Function der Zeit aufzufassen ist, entwickeln wir es nach dem Taylor'schen Lehrsatze und erhalten

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_0 + \tau \left(\frac{d\,\mathfrak{q}}{dt}\right)_0 + \frac{\tau^2}{2}\left(\frac{d^2\mathfrak{q}}{dt^2}\right)_0 + \cdots \tag{152}$$

Wenn τ klein ist, convergirt die Reihe schnell. Bis zu den Gliedern von der Ordnung τ^2 muss sie aber zum mindesten entwickelt werden, da die Beschleunigungen von diesen Gliedern abhängen. Auf die weiter folgenden Glieder kommt es im Folgenden nicht an und es genügt daher, sie durch Punkte anzudeuten.

Nun beachte man, dass $\mathfrak{q}_0 = \mathfrak{r}$ ist und dass $\frac{d\,\mathfrak{q}}{dt}$ in jedem Augenblicke nur durch die Drehbewegung des Fahrzeugs bedingt wird. Bei einer blossen Translationsbewegung würde nämlich die im Fahrzeuge festliegende Strecke $\mathfrak{q}$ nur eine Aenderung der Lage, aber keine Aenderung von Richtung und

Grösse erfahren, d. h. $\mathfrak{q}$ bliebe dann ebenfalls constant, solange $\mathfrak{r}$ constant ist. Dreht sich dagegen das Fahrzeug mit einer Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$, so wird zwar die Grösse von $\mathfrak{q}$ immer noch nicht, wohl aber die Richtung geändert und hiermit ist auch $\frac{d\mathfrak{q}}{dt}$ von Null verschieden. Um die zu dt gehörige Aenderung $d\mathfrak{q}$ zu erhalten, denke man sich den Anfangspunkt O als Bezugspunkt für die Beschreibung der Fahrzeugbewegung gewählt. Zuerst denken wir uns die Translationsbewegung ausgeführt, die zu $d\mathfrak{q}$ nichts beiträgt und lassen hierauf die Rotationsbewegung um den Punkt O und die Axe und den Winkel $\mathfrak{u}dt$ folgen. Der Endpunkt von $\mathfrak{q}$ beschreibt hierbei einen kleinen Bogen und dieser Bogen ist es, der zu dem anfänglichen Werthe von $\mathfrak{q}$ geometrisch summirt werden muss, um den Endwerth zu erhalten, d. h. der Bogen selbst stellt $d\mathfrak{q}$ dar. Andererseits kann aber der Bogen auch aus der bekannten Formel für die Geschwindigkeit eines Punktes bei der Drehung eines starren Körpers entnommen werden, so dass man

$$d\mathfrak{q} = dt\, V\mathfrak{q}\mathfrak{u} \quad \text{oder} \quad \frac{d\mathfrak{q}}{dt} = V\mathfrak{q}\mathfrak{u}$$

erhält. Wendet man dies auf die Zeit $t = 0$ an, so erhält man insbesondere

$$\left(\frac{d\mathfrak{q}}{dt}\right)_0 = V\mathfrak{r}\mathfrak{u}.$$

Ferner liefert eine nochmalige Differentiation

$$\frac{d^2\mathfrak{q}}{dt^2} = V\frac{d\mathfrak{q}}{dt}\mathfrak{u} + V\mathfrak{q}\frac{d\mathfrak{u}}{dt}$$

oder, wenn man im ersten Gliede der rechten Seite den Werth von $\frac{d\mathfrak{q}}{dt}$ aus der vorigen Gleichung einsetzt und hierauf die in Gl. (86) ausgesprochene Rechenvorschrift anwendet,

$$\frac{d^2\mathfrak{q}}{dt^2} = V\mathfrak{u}V\mathfrak{u}\mathfrak{q} + V\mathfrak{q}\frac{d\mathfrak{u}}{dt} = \mathfrak{u}\cdot\mathfrak{u}\mathfrak{q} - \mathfrak{q}\cdot\mathfrak{u}^2 + V\mathfrak{q}\frac{d\mathfrak{u}}{dt}.$$

Für die Zeit $t = 0$ geht dies noch über in

$$\left(\frac{d^2\mathfrak{q}}{dt^2}\right)_0 = \mathfrak{u}\cdot\mathfrak{u}\mathfrak{r} - \mathfrak{r}\cdot\mathfrak{u}^2 + V\mathfrak{r}\frac{d\mathfrak{u}}{dt}.$$

Setzt man diese Werthe in Gleichung (152) ein, so erhält man

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{r} + \tau \cdot V\mathfrak{r}\mathfrak{u} + \frac{\tau^2}{2}\left(\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{u}\mathfrak{r} - \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{u}^2 + V\mathfrak{r}\frac{d\mathfrak{u}}{dt}\right) + \cdots \quad (153)$$

Nachdem die zuerst aufgeworfene Frage beantwortet ist, wollen wir jetzt ferner annehmen, dass der Punkt B zugleich eine Relativbewegung gegen das Fahrzeug ausführe. Es handelt sich dann abermals darum, $\mathfrak{q}$ als Function der Zeit darzustellen und zwar jetzt für ein variables $\mathfrak{r}$. Dabei kann $\mathfrak{r}$ jedenfalls selbst nach dem Taylor'schen Satze in eine Reihe

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + \tau\left(\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right)_0 + \frac{\tau^2}{2}\left(\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}\right)_0 + \cdots \quad (154)$$

entwickelt werden. Nun kann der Punkt B offenbar auch dadurch in seine endgültige Lage gebracht werden, dass wir ihn zuerst die Relativbewegung gegen das Fahrzeug ausführen lassen und ihn nachher sammt dem Fahrzeuge in dessen neue Lage überführen. Die Relativbewegung bewirkt, dass der Radiusvektor des Punktes aus $\mathfrak{r}_0$ in das durch Gl. (154) dargestellte $\mathfrak{r}$ übergeht. Bei der hierauf folgenden Fahrzeugbewegung behält $\mathfrak{r}$ diesen Werth bei; dagegen geht der auf den absoluten Raum bezogene Radiusvektor $\mathfrak{q}$ nach dem bewegten Punkte nun in den durch Gl. (153) dargestellten Werth über. Wir brauchen also, um $\mathfrak{q}$ als Function der Zeit für den Fall eines sich relativ zum Fahrzeuge bewegenden Punktes darzustellen, nur den Werth von $\mathfrak{r}$ aus Gl. (154) in Gl. (153) einzusetzen. Entwickeln wir auch hierbei wieder alle Glieder bis zur Ordnung von τ^2, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathfrak{q} = \mathfrak{r}_0 + \tau\left(\left(\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right)_0 + V\mathfrak{r}_0\mathfrak{u}\right) + \frac{\tau^2}{2}\Bigg(\left(\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}\right)_0 &+ 2V\left(\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right)_0\mathfrak{u} \\ &+ \mathfrak{u} \cdot \mathfrak{u}\mathfrak{r}_0 - \mathfrak{r}_0 \cdot \mathfrak{u}^2 + V\mathfrak{r}_0\frac{d\mathfrak{u}}{dt}\Bigg) + \cdots\end{aligned} \quad (155)$$

Hieraus folgt für die Differentialquotienten von $\mathfrak{q}$ zur Zeit $t = 0$

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{d\mathfrak{q}}{dt}\right)_0 &= \left(\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right)_0 + V\mathfrak{r}_0\mathfrak{u} \\ \left(\frac{d_2\mathfrak{q}}{dt^2}\right)_0 &= \left(\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}\right)_0 + 2V\left(\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right)_0\mathfrak{u} + \mathfrak{u} \cdot \mathfrak{u}\mathfrak{r}_0 - \mathfrak{r}_0 \cdot \mathfrak{u}^2 + V\mathfrak{r}_0\frac{d\mathfrak{u}}{dt}\end{aligned}\right\} \cdot \quad (156)$$

Nun achten wir auf den Zusammenhang, der zwischen $\mathfrak{q}$ und den von A aus gezogenen Radienvektoren $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{a}$ besteht. Nach Abb. 54 bilden die drei das Dreieck ABO und zwar nicht nur in der Anfangslage, sondern auch in jedem folgenden Augenblicke. Hiernach gilt zu jeder Zeit die Gleichung

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{a} + \mathfrak{q}. \tag{157}$$

Die auf den festen Raum bezogene Beschleunigung des Punktes B wird aus $\mathfrak{s}$ durch zweimalige Differentiation nach der Zeit gefunden. Dafür erhält man

$$\frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2} = \frac{d^2\mathfrak{a}}{dt^2} + \frac{d^2\mathfrak{q}}{dt^2},$$

oder wenn man alle Grössen so einsetzt, wie sie für den Augenblick $t = 0$ gelten, dafür aber den Zeiger 0, der dies früher besonders hervorhob, jetzt als entbehrlich unterdrückt,

$$\frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2} = \frac{d^2\mathfrak{a}}{dt^2} + \frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} + 2V\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\mathfrak{u} + \mathfrak{u}\cdot\mathfrak{u}\mathfrak{r} - \mathfrak{r}\cdot\mathfrak{u}^2 + V\mathfrak{r}\frac{d\mathfrak{u}}{dt}. \tag{158}$$

Auch die Beschleunigung $\frac{d^2\mathfrak{p}}{dt^2}$ des Fahrzeugpunktes, der mit B im gegebenen Augenblicke zusammenfällt, lässt sich hieraus sofort entnehmen, indem man die Gleichung auf den Fall eines constanten $\mathfrak{r}$ anwendet. Man erhält dafür

$$\frac{d^2\mathfrak{p}}{dt^2} = \frac{d^2\mathfrak{a}}{dt^2} + \mathfrak{u}\cdot\mathfrak{u}\mathfrak{r} - \mathfrak{r}\cdot\mathfrak{u}^2 + V\mathfrak{r}\frac{d\mathfrak{u}}{dt} \tag{159}$$

indem alle Glieder in Gl. (158), die mit Differentialquotienten von $\mathfrak{r}$ behaftet sind, wegfallen und alle übrigen unverändert bestehen bleiben. Setzt man dies in Gl. (158) ein, so geht sie über in

$$\frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2} = \frac{d^2\mathfrak{p}}{dt^2} + \frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} + 2V\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\mathfrak{u} \tag{160}$$

oder in Worten: die absolute Beschleunigung des bewegten Punktes ist gleich der geometrischen Summe aus der Fahrzeugbeschleunigung, aus der Relativbeschleunigung gegen das Fahrzeug und aus dem doppelten äusseren Produkte aus der Relativgeschwindigkeit und der Winkelgeschwindigkeit des Fahrzeugs.

Das ist der von Coriolis gefundene Satz. — Führt man dieselbe Betrachtung für $\frac{d\mathfrak{s}}{dt}$ durch, so findet man aus Gl. (157)

$$\frac{d\mathfrak{s}}{dt} = \frac{d\mathfrak{a}}{dt} + \frac{d\mathfrak{q}}{dt}$$

oder mit Berücksichtigung von (156)

$$\frac{d\mathfrak{s}}{dt} = \frac{d\mathfrak{a}}{dt} + \frac{d\mathfrak{r}}{dt} + V\mathfrak{r}\mathfrak{u}$$

und indem man dies für ein constantes $\mathfrak{r}$ anwendet,

$$\frac{d\mathfrak{p}}{dt} = \frac{d\mathfrak{a}}{dt} + V\mathfrak{r}\mathfrak{u},$$

also durch Verbindung beider Gleichungen

$$\frac{d\mathfrak{s}}{dt} = \frac{d\mathfrak{p}}{dt} + \frac{d\mathfrak{r}}{dt} \tag{161}$$

oder in Worten: *Die absolute Geschwindigkeit des bewegten Punktes ist gleich der geometrischen Summe aus der Fahrzeuggeschwindigkeit und der Relativgeschwindigkeit gegen das Fahrzeug.*

Die letzte Beziehung lässt sich übrigens auch auf viel einfacherem Wege ableiten und sie ist an sich viel einfacher gestaltet, als der Satz von Coriolis. Die Vermuthung liegt, wenn man beide mit einander vergleicht, auf den ersten Anschein sehr nahe, dass sich die absolute Beschleunigung, ähnlich wie bei der Geschwindigkeit, bloss aus der Relativbeschleunigung und der Fahrzeugbeschleunigung zusammensetzen müsse. Wie man sieht, erweist sich aber diese Vermuthung nach Gl. (160) nicht als richtig, sondern es muss noch ein drittes Glied hinzutreten, das bei der sich auf die Geschwindigkeiten beziehenden Gleichung (161) fehlt.

Schliesslich bemerke ich noch, dass die Gleichungen von (158) an zwar unter der Voraussetzung abgeleitet wurden, dass sich alle darin vorkommenden Grössen auf die Zeit $t = 0$ bezögen, dass hierin aber keine Beschränkung liegt, da es uns freisteht, jeden Augenblick als Anfangspunkt der Zeit in den der Gl. (158) vorausgehenden Formeln zu wählen.