



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1901

Schief aufgekeiltes Schwungrad

[urn:nbn:de:hbz:466:1-84695](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-84695)

20. Aufgabe. Eine gewichtslose Stange SS (Abb. 48) trägt zwei gleich schwere Körper Q und Q' und rotirt um die Axe AA .

Plötzlich werden (durch Auslösen einer Feder o. dgl.) die Gewichte auseinander gezogen, so dass ihr Abstand von 40 auf 60 cm wächst. Wie viel Touren macht die Stange nachher, wenn sie vorher 60 in der Minute machte?

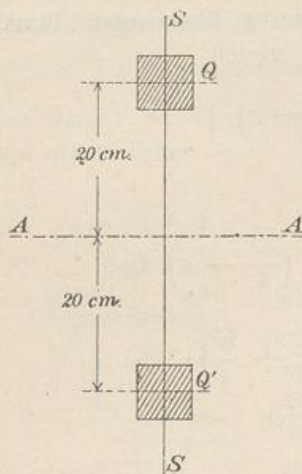


Abb. 48.

Lösung. Auch hier muss der Drall constant bleiben. Wenn die beiden Gewichte wie materielle Punkte behandelt werden können, die sich im Abstände r von der Axe befinden, so ist das Trägheitsmoment

$$\Theta = \frac{2Q}{g} r^2$$

und der Drall

$$B = \frac{2Q}{g} r^2 u.$$

Dieser muss vorher und nachher gleich sein; also wenn man die Werthe von r und u nachher mit r_1 und u_1 bezeichnet

$$r^2 u = r_1^2 u_1 \quad \text{oder} \quad \frac{u_1}{u} = \frac{r^2}{r_1^2}.$$

Setzt man die Zahlenwerthe ein, so erhält man für die Tourenzahl N_1

$$N_1 = 60 \cdot \left(\frac{20}{30}\right)^2 = 26 \frac{2}{3}.$$

Anmerkung. Erscheinungen dieser Art (also Aenderung der Winkelgeschwindigkeit in Folge von Aenderung des Abstandes von der Drehaxe) kommen öfters vor. Wenn man z. B. Wasser durch einen Trichter ausströmen lässt und man hat das Wasser oben im Trichter (etwa durch eine seitlich gerichtete Einflussgeschwindigkeit) in eine geringe Rotation versetzt, so steigert sich diese im Ausströmungsrohr des Trichters erheblich, so dass starke Wirbel entstehen, die den Ausfluss beträchtlich verzögern können.

21. Aufgabe. Der Schwungring eines Schwungrads wiegt 3000 kg und hat 2 m Durchmesser. Die Ebene des Schwungrings sei wegen ungenauen Aufkeilens um einen Winkel von 1° gegen die zur Wellenmittellinie senkrechte Ebene geneigt. Wie gross ist das Moment des von den Lagern aufzunehmenden Kräftepaars, wenn die Welle 120 Touren macht?

Erste Lösung. Man kann die Aufgabe entweder mit Hilfe des Flächensatzes oder mit Hilfe des d'Alembert'schen Princips behandeln. Einfacher und daher gewöhnlich gebraucht ist hier das Verfahren nach d'Alembert, weil sich die Trägheitskräfte auf blosse Centrifugalkräfte reduciren.

In Abb. 49 ist der Schwungring in zwei Projektionen gezeichnet. Der im Zahlenbeispiele zu 1^o angegebene Winkel ist in der Abbildung mit α bezeichnet. Da er jedenfalls klein sein wird (kleiner als dort gezeichnet), kann die andere Projektion des Schwungrings genau genug als kreisförmig angesehen werden. Man fasse ein Element des Schwungrings ins Auge, das zum Centriwinkel $d\varphi$ gehört. Wenn Q das Gewicht des ganzen Schwungrings ist, gehört zu $d\varphi$ das Gewicht

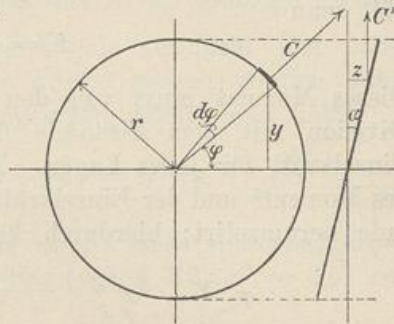


Abb. 49.

$$\frac{Q d\varphi}{2\pi}$$

Für die mit y und z bezeichneten Abstände erhält man

$$y = r \sin \varphi \quad \text{und} \quad z = y \alpha = r \alpha \sin \varphi,$$

wobei an Stelle von $\tan \alpha$ der Bogen α gesetzt werden durfte.

Die Centrifugalkraft C an dem zu $d\varphi$ gehörigen Theilchen ist

$$C = \frac{Q d\varphi}{2\pi} \cdot \frac{u^2 r}{g}$$

Die Horizontalcomponenten aller C stehen im Gleichgewichte mit einander. Dagegen bilden die Vertikalcomponenten C' ein Kräftepaar, dessen Moment mit K bezeichnet sei. Man hat

$$C' = C \sin \varphi = \frac{Q u^2 r}{2\pi g} \sin \varphi d\varphi.$$

Der Hebelarm von C' in Bezug auf die Radmitte ist z und daher wird

$$K = \frac{Q u^2 r^2 \alpha}{2\pi g} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{Q u^2 r^2 \alpha}{2g}$$

Wenn man die lebendige Kraft des Schwungrings, die man ohnehin schon berechnet haben wird, ehe man an eine solche Untersuchung herantritt, mit L bezeichnet, hat man kürzer

$$K = L \alpha.$$

Im Zahlenbeispiele ist $Q = 3000 \text{ kg}$, $u = \frac{120}{60} \cdot 2\pi = 4\pi \text{ sec}^{-1}$,
 $r = 1 \text{ m}$ und $\alpha = \frac{\pi}{180}$ und nach Einsetzen und Ausrechnen erhält man

$$K = 421 \text{ m kg.}$$

Dieses Moment muss von den Lagern aufgenommen werden; die Division mit dem Abstände der Lager von einander liefert die Einzelkraft für jedes Lager. Zu beachten ist, dass die Richtung des Moments und der Einzelkräfte ebenfalls stetig mit dem Schwungrad herumrotiert; hierdurch kommt das „Rütteln“ in den Lagern

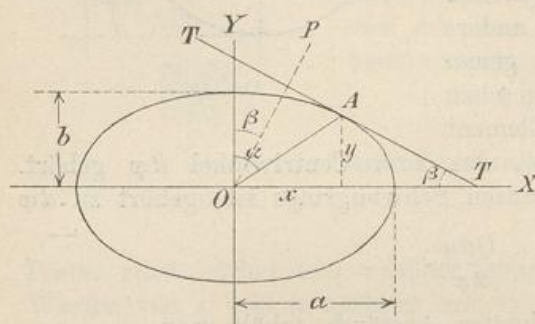


Abb. 49 a.

zu Stande. Zugleich giebt K das Biegemoment an, das von der Welle aufgenommen werden muss; in Bezug auf die Welle ändert sich übrigens die Richtung von K nicht. — Wenn die Welle hinreichend biegsam ist, richtet sich das Schwungrad von selbst auf, so dass der Winkel α und hiermit auch K selbst

kleiner werden.

Zweite Lösung. Um die Aufgabe auch noch nach dem Flächensatze zu lösen, schicke ich eine geometrische Betrachtung über eine Eigenschaft der Ellipse voraus. Der Winkel zwischen einem Halbmesser OA der Ellipse (Abb. 49 a) und der y -Axe sei α , der Winkel, den das Perpendikel OP auf die im Punkte A construirte Tangente TT mit der gleichen Axe bildet, sei β . Dann ist

$$\text{tg } \alpha = \frac{x}{y}$$

und

$$\text{tg } \beta = -\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \cdot \frac{b^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} \text{tg } \alpha,$$

wofür auch, wenn α und β klein genug sind, kürzer

$$\beta = \frac{b^2}{a^2} \alpha$$

geschrieben werden kann.

In diesem Falle kann ferner $B = u\Theta$ gesetzt werden. Der Winkel $\alpha - \beta$ giebt den Richtungsunterschied zwischen \mathfrak{B} und \mathfrak{u} an. Unter der Ellipse in Abb. 49 a ist hierbei der Meridian des

Trägheitsellipsoids des Schwungrings zu verstehen. Der Drall \mathfrak{B} beschreibt bei der Drehung des Schwungrads eine Kegelfläche mit dem angegebenen Oeffnungswinkel. Um den absoluten Betrag von $\frac{d\mathfrak{B}}{dt}$ zu berechnen, beachte man, dass das zu dt gehörige $d\mathfrak{B}$ ein Bogenelement vom Basiskreise jenes Kegels ausmacht und daher (bei kleinem $\alpha - \beta$) gleich $B(\alpha - \beta)u dt$ gesetzt werden kann. Für das statische Moment der Zwangskräfte erhält man daher

$$K = B(\alpha - \beta)u = u^2 \Theta (\alpha - \beta) = u^2 \Theta \alpha \frac{a^2 - b^2}{a^2}.$$

Diese Formel gilt noch allgemein für irgend einen Rotationskörper. Für den Schwungring ist aber überdies (vgl. § 22) $a^2 = 2b^2$ und daher, wie vorher,

$$K = \frac{1}{2} u^2 \Theta \alpha = L\alpha.$$

22. Aufgabe. Zwei gleich schwere Kugeln sind durch eine Stange verbunden; man soll die freien Axen des dadurch gebildeten Körpers angeben.

Lösung. Das Trägheitsellipsoid für den Schwerpunkt ist ein verlängertes Umdrehungsellipsoid, dessen grosse Axe mit der Stangenaxe zusammenfällt. Die Stangenaxe und jede senkrecht zu ihr durch den Schwerpunkt gezogene Axe ist eine freie Axe des Körpers. Eine stabile Drehaxe ist aber nur die Stangenaxe, da nur für sie das Trägheitsmoment zu einem absoluten Minimum (oder Maximum) wird.

23. Aufgabe. Eine homogene Stange von der Länge $2r$ ist an den Enden mit Rollen versehen, mit denen sie auf einer glatten senkrechten Wand und einem glatten Fussboden ruht. Ausserdem soll durch eine geeignete Vorrichtung auch dafür gesorgt sein, dass sich die Rollen von der Wand oder dem Fussboden nicht abheben können. Vorher war die Stange in der durch Abb. 50 angegebenen Lage AB festgehalten. Dann wird sie ohne Stoss frei gelassen und man soll berechnen, wie lange es dauert, bis sie unten liegt.

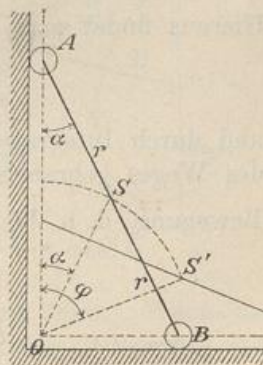


Abb. 50.

Lösung. Die Entfernung von O bis zum Stangenschwerpunkte S ist nach einer bekannten Eigenschaft des rechtwinkligen Dreiecks gleich r , daher beschreibt S während des Herabfallens einen Kreis um O vom Halbmesser r . Irgend eine spätere Lage der Stange sei durch den Winkel φ gekennzeichnet, den die Stange mit der Wand oder den auch die Linie OS' mit

der Wand bildet. Die Stange hat sich während dessen um den Winkel $\varphi - \alpha$ gedreht. Die Winkelgeschwindigkeit, mit der sie sich im gegebenen Augenblicke dreht, ist

$$u = \frac{d\varphi}{dt}$$

und die Geschwindigkeit des Schwerpunkts hat den Absolutbetrag

$$v = r \frac{d\varphi}{dt}.$$

Die lebendige Kraft der Stange, deren Masse mit m bezeichnet sei, ist daher

$$L = \frac{1}{2} m r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \Theta \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2.$$

Für das Trägheitsmoment Θ findet man leicht

$$\Theta = m \frac{r^2}{3}$$

und daher wird

$$L = \frac{2}{3} m r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2.$$

Der lebendigen Kraft L muss die Arbeit der äusseren Kräfte gleich sein. Die Auflagerkräfte leisten aber keine Arbeit, da Reibungen ausgeschlossen sein sollen und die Arbeit des Gewichts ist gleich mg mal der Senkung des Schwerpunkts, die gleich $r(\cos \alpha - \cos \varphi)$ gesetzt werden kann. Wir haben daher

$$\frac{2}{3} r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = g(\cos \alpha - \cos \varphi).$$

Hieraus findet man

$$\frac{dt}{d\varphi} = \sqrt{\frac{2r}{3g} \cdot \frac{1}{\cos \alpha - \cos \varphi}}$$

und durch Integration nach φ folgt die Zeit, die zum Durchlaufen des Weges gebraucht wird. Ist t die Zeit, die bis zum Ende der Bewegung, d. h. bis $\varphi = \frac{\pi}{2}$ verstreicht, so hat man

$$t = \sqrt{\frac{2r}{3g}} \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \alpha - \cos \varphi}}.$$

Das Integral ist ein elliptisches, das ganz ähnlich wie das bei der Pendelbewegung in Gl. (51) vorkommende weiter behandelt werden kann. Man setze, um auf die frühere Form zu kommen, zunächst $\pi - \varphi = 2\chi$ und $\pi - \alpha = 2\beta$, dann wird

$$\cos \varphi = -\cos 2\chi = 2\sin^2\chi - 1; \cos \alpha = 2\sin^2\beta - 1; d\varphi = -2d\chi;$$

$$t = \sqrt{\frac{2r}{3g}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\beta} \frac{2d\chi}{\sqrt{2(\sin^2\beta - \sin^2\chi)}}.$$

Der einzige wesentliche Unterschied gegenüber dem früheren Falle besteht nun darin, dass die untere Grenze hier $\frac{\pi}{4}$ anstatt Null ist. Man kann aber das Integral als die Differenz von zwei bestimmten Integralen auffassen, von denen das eine von 0 bis β und das andere von 0 bis $\frac{\pi}{4}$ reicht und auf jedes von beiden die frühere Umformung anwenden. Dadurch erhält man

$$t = 2 \sqrt{\frac{r}{3g}} \left\{ F\left(\sin \beta, \frac{\pi}{2}\right) - F\left(\sin \beta, \gamma\right) \right\},$$

wobei γ durch die Bedingung bestimmt wird

$$\sin \gamma = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\sin \beta}.$$

Da $\beta > \frac{\pi}{4}$, lässt sich γ stets angeben.

24. Aufgabe. Ein Gyroscop besteht aus einem Schwungringe von 20 cm Durchmesser und 10 kg Gewicht und einem Rahmen (dessen Masse gegen die Schwungringmasse vernachlässigt werden soll), in dem der Schwungring mit 100 Umdrehungen in der Secunde rotirt. Der Rahmen hat einen Arm AB (Abb. 51) von 20 cm Länge und wird bei B drehbar auf eine Spitze des Gestells BC aufgesetzt. In welchem Sinne und mit welcher Geschwindigkeit dreht sich das Gyroscop um das Gestell BC , nachdem der Beharrungszustand eingetreten ist?

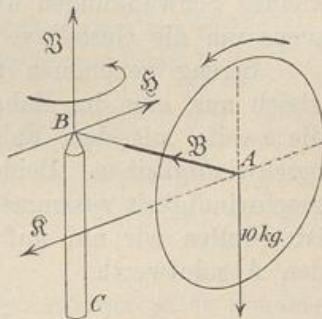


Abb. 51.

Lösung. Wir haben es hier mit einem Falle der pseudoregulären Präcession zu thun. Wenn der Rahmen zuerst bei horizontaler Stellung des Armes AB ruhte und hierauf losgelassen wird, tritt in Folge des Gewichts zunächst eine kleine Senkung des Schwungrings ein. Diese muss wegen der Auflagerbedingung bei B in einer Drehung um B bestehen. Dabei ändert sich die Richtung des Dralls \mathfrak{S} . Um diese Änderung zu erzwingen, muss ein statisches Moment äusserer Kräfte von senk-