



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1901

§. 25 b. Der Satz von Carnot über den Verlust an lebendiger Kraft beim
Stosse starrer Körper

[urn:nbn:de:hbz:466:1-84695](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-84695)

Schliesslich sei hier noch darauf hingewiesen, wie sich das Princip von d'Alembert gestaltet, wenn es auf Stösse am starren Körper angewendet wird. Solange der Stoss vom Antriebe $\mathfrak{A} = \int \mathfrak{P} dt$ einwirkt, bringt er an jedem Massenpunkte des Körpers eine gewisse Beschleunigung hervor, die gleich $\frac{d^2 \mathfrak{s}}{dt^2}$ geschrieben werden kann und die zu jeder Zeit proportional mit \mathfrak{P} ist. Bringt man die Trägheitskräfte $-m \frac{d^2 \mathfrak{s}}{dt^2}$ an, so bilden sie mit \mathfrak{P} in jedem Augenblicke ein Gleichgewichtssystem. Um dieses Gleichgewichtssystem näher zu untersuchen, kann man sich an Stelle von \mathfrak{P} auch $\int \mathfrak{P} dt$ gesetzt denken, wenn man nur auch für jede Trägheitskraft ihr Zeitintegral, also $-m \left(\frac{d \mathfrak{s}}{dt} - \left(\frac{d \mathfrak{s}}{dt} \right)_0 \right)$ oder mit anderen Worten $-m (\mathfrak{v} - \mathfrak{v}_0)$ einsetzt, falls hier unter \mathfrak{v}_0 die Geschwindigkeit verstanden wird, die der betreffende materielle Punkt etwa schon vor dem Stosse hatte. In Worten heisst dies, dass der durch eine Kraft in irgend einem Maassstabe dargestellte Impuls mit den im entgegengesetzten Sinne genommenen Zuwüchsen der Bewegungsgrössen, falls man sie sich im gleichen Maassstabe durch Kräfte wiedergegeben denkt, ein Gleichgewichtssystem bildet. Schreibt man an, dass des Gleichgewichts wegen die geometrische Summe der darstellenden Kräfte gleich Null sein und dass die Summe ihrer statischen Momente verschwinden muss, wobei man den Schwerpunkt zum Momentenpunkte wählen kann, so gelangt man wieder zu denselben Gleichungen, die vorher aus dem Schwerpunkts- und dem Flächensatze abgeleitet worden waren.

§ 25b. Der Satz von Carnot über den Verlust an lebendiger Kraft beim Stosse starrer Körper.

Unter einem starren Körper soll jetzt der Grenzfall eines weichen oder plastischen, d. h. eines Körpers vom Elasticitätsgrade Null verstanden werden, der aus einem solchen dadurch hervorgeht, dass man sich die Zusammendrückbarkeit des

Körpers unter stetiger Festhaltung der genannten Eigenschaft bis auf Null vermindert denkt. Eine solche nähere Bestimmung ist, wie wir vorher erkannten, nöthig, um den Aufgaben über den Stoss starrer Körper gegeneinander eine physikalisch zulässige Bedeutung zu geben. Wenn dies von anderen Autoren auch nicht ausdrücklich ausgesprochen wird, liegt diese Vorstellung doch überall stillschweigend zu Grunde, wo anderwärts vom Stosse starrer Körper geredet wird oder die darüber angestellten Betrachtungen bleiben wenigstens nur dann richtig, wenn man dem unbestimmt gelassenen Begriffe des starren Körpers nachträglich überall den hier genauer angegebenen Sinn unterlegt.

Wenn zwei weiche Körper aufeinander stossen, endigt der Stoss mit der ersten Stossperiode, d. h. mit dem Augenblicke, in dem die Körper an der Berührungsstelle gleiche Geschwindigkeiten erlangt haben. Die durch die Zusammendrückung der Körper hervorgerufene Annäherung hat dann zugleich ihren grössten Werth erreicht. Auch für den Stoss starrer Körper in dem hier definirten Sinne ist daher die Bedingung festzuhalten, dass die Körper an der Stossstelle gleiche Geschwindigkeiten durch den Stoss erlangen. Dabei ist zunächst an den graden Stoss gedacht. Für den allgemeinsten Fall des Stosses zweier starrer Körper gegeneinander soll die Aussage dahin ergänzt werden, dass die Stossstellen gleiche Geschwindigkeits-Componenten in der Richtung der Stossnormalen erlangen und dass ferner einem Gleiten der Oberflächen über einander während des Stosses keine Reibung entgegenstehe. Die letzte Voraussetzung ist freilich abermals vollkommen willkürlich eingeführt und sie entspricht, wie wir wissen, dem wahren Verhalten der festen Körper keineswegs. Als nähere Definition des idealen starren Körpers ist sie aber zulässig und da der Satz von Carnot, der sich auf starre Körper von den hier vorausgesetzten Eigenschaften bezieht, in manchen Theilen der technischen Mechanik eine nicht unerhebliche Rolle spielt, mag sie an dieser Stelle gelten.

Dabei möchte ich freilich sofort bemerken, dass meine

Absicht bei der Behandlung des Carnot'schen Satzes hauptsächlich darauf hinausgeht, meine Leser durch eine genauere Darlegung des wahren Sachverhaltes vor einer Ueberschätzung dieses Satzes, auf den man sich in der technischen Hydraulik sehr häufig bezieht, zu schützen und sie dadurch davor zu behüten, manche Formeln, die als Näherungsannahmen eine gewisse Berechtigung haben, für streng beweisbare und daher entsprechend zuverlässige Folgerungen aus den Grundgesetzen der Mechanik anzusehen. Im letzten Abschnitte dieses Bandes werde ich hierauf zurückkommen.

Der Verlust an lebendiger Kraft beim graden centralen Stosse weicher (und hiermit auch der „starren“) Körper ist schon im ersten Bande ermittelt worden. Bezeichnet man die Massen beider Körper mit m_1 und m_2 und die Geschwindigkeiten vor dem Stosse mit v_1 und v_2 , wobei $v_2 > v_1$ sein möge, so ist die gemeinsame Geschwindigkeit am Ende der ersten Stossperiode, die hier vorübergehend mit w bezeichnet werden mag,

$$w = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

und der Verlust an lebendiger Kraft stellt sich zunächst in der Form

$$\text{Verl} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - (m_1 + m_2) \frac{w^2}{2}$$

dar. Dieser Ausdruck kann auf verschiedene Art umgeformt werden, und zwar, um auf den Carnot'schen Satz zu kommen, auch in folgender Weise

$$\text{Verl} = \frac{1}{2} (m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + (m_1 + m_2) w^2 - 2(m_1 + m_2) w^2)$$

oder, wenn man in dem letzten mit w^2 behafteten Gliede für den einen Faktor w den vorher dafür festgestellten Werth einsetzt,

$$\begin{aligned} \text{Verl} &= \frac{1}{2} (m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + m_1 w^2 + m_2 w^2 - 2w(m_1 v_1 + m_2 v_2)) \\ &= \frac{1}{2} m_1 (w - v_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2 - w)^2. \end{aligned} \quad (125g)$$

Die beiden Glieder dieses Ausdrucks haben eine einfache Bedeutung. Die Differenzen $w - v_1$ und $v_2 - w$ geben nämlich

die Geschwindigkeitsänderungen an, die beide Körper durch den Stoss erfahren. Fasst man daher diese Geschwindigkeitsänderungen als selbständige Bewegungszustände auf, so ist die Summe der zu ihnen gehörigen lebendigen Kräfte ebenso gross als der in Wirklichkeit eintretende Verlust an lebendiger Kraft, den wir berechnen wollten. Diese Aussage spricht den Carnot'schen Satz aus, der indessen, wie sich sofort zeigen wird, nicht nur für den graden centralen Stoss, sondern auch noch in viel allgemeineren Fällen seine Gültigkeit behält.

Zunächst gilt der Satz auch für den beliebigen — schiefen und excentrischen — Stoss von zwei freien starren Körpern gegeneinander. Um dies zu beweisen, bezeichne ich die Geschwindigkeit der vom Stosse getroffenen Stelle des ersten Körpers in irgend einem Augenblicke während der Stosszeit mit w_1 , die Geschwindigkeit der Stossstelle des zweiten Körpers mit w_2 . Da sich die Körper an der Stossstelle während der ganzen Stossdauer berühren — obschon die Oberflächen im allgemeinen zugleich übereinander gleiten —, müssen die in der Richtung der Stossnormalen genommenen Componenten von w_1 und w_2 gleich gross sein. Der ebenfalls in die Richtung der Stossnormalen fallende Stossdruck am ersten Körper sei mit \mathfrak{P} , das bis zu dem betrachteten Augenblicke genommene Zeitintegral von \mathfrak{P} mit \mathfrak{A} und das über die ganze Stossdauer erstrebte Zeitintegral mit \mathfrak{A}' bezeichnet. Am zweiten Körper kehren sich die Richtungen von \mathfrak{P} und \mathfrak{A} dem Wechselwirkungsgesetze zufolge um und man hat daher für ihn — \mathfrak{P} bzw. — \mathfrak{A} und — \mathfrak{A}' zu setzen. Die Arbeit von \mathfrak{P} am ersten Körper während eines Zeitelementes dt ist gleich

$$\mathfrak{P} w_1 dt,$$

und die Arbeit des Stossdrucks am zweiten Körper gleich

$$- \mathfrak{P} w_2 dt.$$

Nach dem, was vorher über w_1 und w_2 bemerkt wurde, sind beide Arbeiten von gleicher Grösse und entgegengesetzten Vorzeichen, also

$$\mathfrak{P}(w_1 - w_2) = 0. \quad (125 h)$$

Die Geschwindigkeiten w_1 und w_2 der Stossstellen sind aber nicht jene, die diesen zukämen, wenn sie sich so bewegten, wie es dem starren Zusammenhange mit den fern von der Stossstelle gelegenen Körpermassen entspräche. So klein auch die Formänderungen sein mögen und wenn wir sie beim Grenzübergänge vom weichen zum starren Körper schliesslich selbst ganz verschwinden lassen: während der dann ebenfalls gegen Null hin convergirenden Stossdauer müssen wir jedenfalls darauf Rücksicht nehmen, dass sich die Stossstelle der minimalen Formänderung wegen mit anderer Geschwindigkeit zu bewegen vermag, als es dem starren Zusammenhange mit der Hauptmasse des gestossenen Körpers entsprechen würde. Jene Geschwindigkeiten der Stossstellen, die den Bewegungszuständen der beiden Körper im gegebenen Augenblicke mit Vernachlässigung der Formänderung an der Stossstelle zugehörten, seien zum Unterschiede von w_1 und w_2 mit v_1 und v_2 bezeichnet.

Die Aenderung, die die lebendige Kraft des ersten Körpers während dt erfährt, ist gleich jener Arbeit des Stossdrucks \mathfrak{P} , die zum Wege $v_1 dt$ gehört, denn wir wissen schon aus den Untersuchungen des vorhergehenden Paragraphen, dass die Arbeit eines Impulses $\mathfrak{P} dt$ gleich der von ihr verursachten Aenderung der lebendigen Kraft ist, falls während dt keine Formänderung eintritt. Der Rest, also

$$\mathfrak{P}(w_1 - v_1) dt$$

wird auf die Formänderungsarbeit am ersten Körper verwendet. Hierbei ist übrigens wohl zu beachten, dass auch beim starren Körper eine endliche Formänderungsarbeit möglich ist, denn wenn auch der Weg der Zusammendrückung gegen Null convergirt, so convergirt gleichzeitig die Grösse des Stossdrucks gegen Unendlich und das Produkt $0 \cdot \infty$ behält bei der hier zu Grunde gelegten Definition des starren Körpers einen endlichen Werth.

Ebenso wird während des Zeitelementes dt die Arbeit

$$- \mathfrak{P}(w_2 - v_2) dt$$

auf die Formänderung des zweiten Körpers verwendet. Die

Summe beider Formänderungsarbeiten ist gleich dem Verluste an lebendiger Kraft während dt , also

$$d \text{Verl} = \mathfrak{P} (\mathfrak{w}_1 - \mathfrak{v}_1 - \mathfrak{w}_2 + \mathfrak{v}_2) dt$$

und daher mit Berücksichtigung von Gl. (125h) auch

$$d \text{Verl} = \mathfrak{P} (\mathfrak{v}_2 - \mathfrak{v}_1) dt.$$

Der gesammte Verlust an lebendiger Kraft während der ganzen Stossdauer folgt daraus zu

$$\text{Verl} = \int (\mathfrak{v}_2 - \mathfrak{v}_1) \mathfrak{P} dt.$$

Um die Integration nach der Zeit auszuführen, bezeichne ich die Geschwindigkeit \mathfrak{v}_1 , die dem Anfange des Stosses entspricht, mit \mathfrak{v}_1^0 und die am Ende des Stosses mit \mathfrak{v}_1' . Die Aenderung $\mathfrak{v}_1' - \mathfrak{v}_1^0$ entspricht dem ganzen Stossimpulse \mathfrak{A}' , die Aenderung $\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_1^0$ bis zu dem betrachteten Augenblicke dem bis dahin bereits verstrichenen Impulse \mathfrak{A} und die beiden Aenderungen verhalten sich zu einander wie die absoluten Werthe A und A' dieser Impulse, da die Richtung des Stossdrucks fortwährend mit der Stossnormalen zusammenfällt und sich daher nicht ändert. Man hat daher

$$\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{v}_1^0 + \frac{A}{A'} (\mathfrak{v}_1' - \mathfrak{v}_1^0) \quad \text{und ebenso} \quad \mathfrak{v}_2 = \mathfrak{v}_2^0 + \frac{A}{A'} (\mathfrak{v}_2' - \mathfrak{v}_2^0).$$

Setzt man dies in die vorige Gleichung ein, so erhält man

$$\text{Verl} = (\mathfrak{v}_2^0 - \mathfrak{v}_1^0) \int \mathfrak{P} dt + (\mathfrak{v}_2' - \mathfrak{v}_2^0 - \mathfrak{v}_1' + \mathfrak{v}_1^0) \int \frac{A}{A'} \mathfrak{P} dt.$$

Nun ist aber $\mathfrak{P} dt = d\mathfrak{A}$ und daher

$$\text{Verl} = (\mathfrak{v}_2^0 - \mathfrak{v}_1^0) \mathfrak{A}' + (\mathfrak{v}_2' - \mathfrak{v}_2^0 - \mathfrak{v}_1' + \mathfrak{v}_1^0) \cdot \frac{1}{2} \mathfrak{A}'.$$

Beachtet man ferner noch, dass am Ende des Stosses die Projektionen von \mathfrak{v}_1 und \mathfrak{v}_2 auf die Stossnormale gleich gross geworden sind, so vereinfacht sich dies zu

$$\text{Verl} = \frac{1}{2} (\mathfrak{v}_2^0 - \mathfrak{v}_1^0) \mathfrak{A}'. \quad (125i)$$

Hiermit ist ein Ausdruck für den Verlust an lebendiger Kraft gefunden, von dem nur noch gezeigt zu werden braucht, dass er mit dem nach dem Carnot'schen Satze berechneten übereinstimmt. Zu diesem Zwecke sein nun irgend ein fern

von der Stossstelle liegender materieller Punkt des ersten Körpers ins Auge gefasst, dessen Geschwindigkeit vor dem Stosse mit \mathbf{v}^0 und nach dem Stosse mit \mathbf{v}' (also unter Weglassung des untern Zeigers gegenüber den vorher gebrauchten Bezeichnungen) bezeichnet werden soll. Wir können dann sagen, dass der spätere Bewegungszustand des ersten Körpers aus dem früheren dadurch hervorgeht, dass sich ihm ein Bewegungszustand $\mathbf{v}' - \mathbf{v}^0$ zugesellt. Betrachtet man, wie es bei der Aussage des Carnot'schen Satzes geschieht, den Bewegungszustand $\mathbf{v}' - \mathbf{v}^0$ für sich, so gehörte ihm, wenn er allein vorkäme, eine gewisse lebendige Kraft zu, die mit L_1 bezeichnet werden mag. Nach dem Satze von der Superposition der Bewegungen liesse sich der Bewegungszustand $\mathbf{v}' - \mathbf{v}^0$ jedenfalls dadurch getrennt für sich hervorbringen, dass man an dem ruhend gedachten ersten Körper den Stoss vom Impulse \mathfrak{A}' wirken liesse. Unter der Voraussetzung, dass sich dieser Stoss ohne Formänderung abspielte, wäre dann die lebendige Kraft L_1 , die durch den Stoss hervorgebracht würde, gleich der Arbeit des Impulses zu setzen. Dabei müsste die Geschwindigkeit der Stossstelle während des Stosses von Null bis zu dem Endwerthe $\mathbf{v}_1' - \mathbf{v}_1^0$ wachsen. Die Arbeit des Impulses und hiermit die lebendige Kraft L_1 berechnet sich demnach zu

$$L_1 = \frac{1}{2} (\mathbf{v}_1' - \mathbf{v}_1^0) \mathfrak{A}'$$

und ebenso findet man für den zweiten Körper

$$L_2 = -\frac{1}{2} \mathfrak{A}' (\mathbf{v}_2' - \mathbf{v}_2^0),$$

wobei nur zu beachten ist, dass bei ihm $-\mathfrak{A}'$ an Stelle von \mathfrak{A}' tritt. Die Summe liefert

$$L_1 + L_2 = \frac{1}{2} (\mathbf{v}_1' - \mathbf{v}_1^0 - \mathbf{v}_2' + \mathbf{v}_2^0) \mathfrak{A}'.$$

Da nun, wie vorher schon bemerkt war, am Ende des plastischen Stosses die Projektion von \mathbf{v}_1' auf die Stossnormale oder auf die Richtung von \mathfrak{A}' ebenso gross ist wie die Projektion von \mathbf{v}_2' , stimmt dies genau mit dem Werthe in Gl. (125i) überein und man findet

$$\text{Verl} = L_1 + L_2, \quad (125k)$$

womit der Carnot'sche Satz auch für den allgemeinsten Fall des Stosses von zwei „plastisch-starren“ Körpern gegeneinander bewiesen ist.

Auch auf den Fall, dass die stossenden Körper nicht völlig frei, sondern bestimmten Bedingungen unterworfen sind, lässt sich der Satz unter Beibehaltung der früheren Schlussweise übertragen, falls dabei nur immer vorausgesetzt wird, dass alle Körper, durch die diese Bedingungen verwirklicht sind, auch wenn sie in der Grenze als starr angesehen werden, selbst im Grenzfalle noch den Elasticitätsgrad Null haben und dass ferner kein weiterer Verlust an lebendiger Kraft durch Reibungen herbeigeführt wird. Ich begnüge mich damit, dies hier noch an einem einfachen Falle dieser Art zu zeigen.

Ein starrer Körper möge zunächst völlig frei sein und eine beliebige Anfangsbewegung besitzen. Dann soll irgend ein Punkt von ihm durch eine geeignete Vorrichtung plötzlich festgehalten werden, so dass sich der Körper von da ab nur noch um diesen festen Punkt weiter zu drehen vermag. Man soll angeben, wie er sich weiterhin bewegt und wie gross der Verlust an lebendiger Kraft ist, den er durch den Stoss erleidet.

Die Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes vor dem Stosse sei wieder mit \mathbf{v}^0 , die nach dem Stosse mit \mathbf{v}' bezeichnet, die Geschwindigkeiten der Stossstelle insbesondere, sofern von der Formänderung abgesehen wird, mit \mathbf{v}_1^0 und \mathbf{v}_1' , wobei freilich zu beachten ist, dass auch hier wieder während der Stosszeit die wahre Geschwindigkeit \mathbf{w}_1 des Punktes, den man festzuhalten im Begriffe ist, der unvermeidlichen Formänderung wegen, von \mathbf{v}_1 verschieden ist. Die Endgeschwindigkeit \mathbf{v}_1' ist übrigens nach der im vorliegenden Falle vorgeschriebenen Bedingung gleich Null zu setzen. — Durch den Stoss wird der Bewegungszustand um $\mathbf{v}' - \mathbf{v}^0$ abgeändert und wir können uns einen selbständigen Bewegungszustand denken, der sich dem vorhergehenden überlagert und bei dem

jeder Punkt die Geschwindigkeit $\mathbf{v}' - \mathbf{v}^0$, die Stossstelle also speciell die Geschwindigkeit $-\mathbf{v}_1^0$ besitzt. Der Stossimpuls, von dem zunächst nur der Angriffspunkt gegeben ist, muss jedenfalls so gerichtet und von solcher Grösse sein, dass er für sich den Bewegungszustand $\mathbf{v}' - \mathbf{v}^0$ hervorruft, insbesondere also seinem Angriffspunkte die gegebene Geschwindigkeit $-\mathbf{v}_1^0$ ertheilt. Dadurch ist aber, wie aus § 25a hervorgeht, der Stossimpuls schon vollständig bestimmt. Nach Gl. (125d) (S. 215) folgt nämlich, wenn man darin die Componenten von \mathbf{r} noch speciell durch die von \mathbf{p} ersetzt, die zu einem gegebenen Stossimpulse \mathfrak{A} gehörige Geschwindigkeit \mathbf{v} des Angriffspunktes von \mathfrak{A} . Zerlegt man diese Gleichung in drei Componenten. gleichungen nach den Richtungen der $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, so lassen sich diese drei Gleichungen auch nach den Componenten $A_1 A_2 A_3$ von \mathfrak{A} auflösen, indem sie für diese Unbekannten vom ersten Grade sind. Nachdem dies geschehen ist, kennt man den Stossimpuls \mathfrak{A} nach Richtung und Grösse, der auf den festzuhaltenden Punkt vom Gestelle aus übertragen werden muss. Hiermit ist auch der Bewegungszustand nach dem Stosse als bekannt zu betrachten.

Für den Verlust an lebendiger Kraft können wir ohne Weiteres den Ausdruck in Gl. (125i) in Anspruch nehmen, wenn wir unter dem zweiten Körper, auf den sich \mathbf{v}_2^0 bezieht, das Gestell verstehen, also die Vorrichtung, durch die der betreffende Punkt genöthigt wird, nach Ablauf des Stosses in Ruhe zu bleiben. Die Geschwindigkeit \mathbf{v}_2^0 selbst ist daher gleich Null zu setzen und man hat

$$\text{Verl} = -\frac{1}{2} \mathbf{v}_1^0 \mathfrak{A}'.$$

Das hier auftretende Minus-Zeichen erklärt sich leicht damit, dass \mathfrak{A}' den Stossimpuls am ersten Körper bedeutet, der die Geschwindigkeit \mathbf{v}_1^0 vernichtet, also ungefähr — wenn auch keineswegs genau — entgegengesetzt gerichtet mit \mathbf{v}_1^0 sein muss. Das innere Produkt $\mathbf{v}_1^0 \mathfrak{A}'$ hat daher an sich einen negativen, der Verlust an lebendiger Kraft dagegen, des Minuszeichens wegen, einen positiven Werth.

Nun beachte man, dass der Stossimpuls \mathfrak{W}' am ruhend gedachten Körper den Bewegungszustand $\mathfrak{v}' - \mathfrak{v}^0$ hervorbrächte. Die diesem zugehörige lebendige Kraft sei wieder mit L_1 bezeichnet. Dann ist L_1 ebensogross wie die Arbeit des Stossimpulses \mathfrak{W}' , wenn dieser den Bewegungszustand $\mathfrak{v}' - \mathfrak{v}^0$ aus dem Ruhezustande heraus hervorbringt. Dabei steigt aber die Geschwindigkeit des Angriffspunktes von \mathfrak{W}' von Null an bis auf $-\mathfrak{v}_1^0$ an und für die Arbeit von \mathfrak{W}' und hiermit zugleich für L_1 erhält man daher

$$L_1 = -\frac{1}{2} \mathfrak{v}_1^0 \mathfrak{W}'.$$

Mit dem vorher für Verl gefundenen Werthe stimmt dies aber genau überein und wir finden daher auch hier den Carnot'schen Satz durch die Gleichung

$$\text{Verl} = L_1$$

bestätigt.

Man sieht nun auch leicht ein, dass sich derselbe Beweisgang auch auf andere Arten von Zwangsbedingungen übertragen lässt, so lange es sich um einen rein plastischen Stoss handelt, für den die zu Gl. (125i) führende Betrachtung stets ohne Aenderung übernommen werden kann.

Dagegen wird der Carnot'sche Satz stets ungültig, sobald der Stoss entweder nicht ganz unelastisch ist oder sobald (etwa beim schiefen Stosse) Reibungen vorkommen, die sich dem Uebereinanderweggleiten der Stossstellen widersetzen.

§ 26. Schwingungen von Stäben mit gleichförmig vertheilter Masse.

In der theoretischen Physik hat das Problem der schwingenden Saiten, also etwa der Violinsaiten, das zuerst von Fourier vollständig gelöst wurde, von jeher eine wichtige Rolle gespielt. Die Mathematiker behandeln es mit Vorliebe schon deshalb, weil sich an die Lösung dieses Problems einige der wichtigsten Fortschritte der Mathematik geknüpft haben. Ich werde hier nicht darauf eingehen, sondern an Stelle davon