Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1901

§. 24. Die pseudoreguläre Präcession

urn:nbn:de:hbz:466:1-84695

§ 24. **Die pseudoreguläre Präcession.**

Wir wollen das Problem jetzt noch von einer anderen Seite her in Angriff nehmen. Dabei sehen wir von der regulären Präcession ganz ab, nehmen vielmehr den Anfangszustand sonst ganz willkürlich gegeben an, setzen aber voraus, dass der Kreisel anfänglich sehr schnell um eine Axe rotirte, die von der Figurenaxe nur wenig abwich. Diese Annahmen sind um so unbedenklicher, als sie bei den gewöhnlich beobachteten Kreiselbewegungen in der That erfüllt sind. Was unter dem „sehr schnell" zu verstehen ist, wird sich bald zeigen; unter der geringen Abweichung zwischen Kreiselaxe und anfänglicher Rotationsaxe möge man sich etwa einen Winkel von 1^0 oder darunter vorstellen.

Die Schwerkraft denken wir uns vorläufig ganz beseitigt. Da beim Kugelkreisel jede Axe eine freie Axe ist, rotirt er um die anfängliche Rotationsaxe so lange unverändert weiter, als keine äussere Kraft einwirkt. Wir denken uns jetzt diesem Kreisel einen kleinen Stoss ertheilt und zwar möge eine constante Kraft, deren Richtungslinie die Figurenaxe schneidet, eine gewisse kleine Zeit t hindurch auf den Kreisel einwirken. Diese Zeit t soll zwar klein sein, wegen der grossen Winkelgeschwindigkeit u_0 können wir sie uns aber doch so gross vorstellen, dass der Kreisel während dessen mehrere Umdrehungen ausführt. Da die Figurenaxe um $\mathfrak{u}_0$ rotirt, verschiebt sich zwar der Angriffspunkt der Kraft etwas im Raume und das statische Moment $\mathfrak{K}$ der Kraft ist daher während der Zeit t nicht genau constant. Die Abweichung ist aber gering und wir können daher für den Hebelarm der Kraft die mittlere Richtung während eines Umlaufs in Anrechnung bringen, die mit der Richtung von $\mathfrak{u}$ zusammenfällt. Das statische Moment $\mathfrak{K}$ nehmen wir daher senkrecht zu $\mathfrak{u}$ gerichtet und constant während der Zeit t an.

An Stelle von Gl. (110) haben wir hier

$$\Theta \frac{d\mathfrak{u}}{dt} = \mathfrak{K}$$

und diese Gleichung lässt sich wegen der Constanz von $\mathfrak{K}$ sofort integriren. Wir erhalten

$$\Theta \mathfrak{u} = \Theta \mathfrak{u}_0 + \mathfrak{K} t. \tag{122}$$

Die ganze Betrachtung würde freilich hinfällig werden, wenn sich der Werth von $\mathfrak{u}$ nach Ablauf der Zeit t merklich von dem Anfangswerthe $\mathfrak{u}_0$ unterschiede. Wir wollen jetzt sehen, wie gross wir uns u_0 (oder wie klein wir uns K) zu diesem Zwecke vorstellen müssen. Unter t möge etwa die Zeit verstanden werden, während deren der Kreisel zehn Umdrehungen ausführte. Ferner sei K gleich Qs gewählt, also gleich dem statischen Momente, das das Gewicht Q im günstigsten Falle (wenn $\mathfrak{s}$ horizontal wäre) ausüben könnte. Wir wollen dann verlangen, dass sich während dieser Zeit die Richtungslinie von $\mathfrak{u}$ höchstens um so viel geändert hat, dass der davon beschriebene Bogen $\frac{1}{1000}$ des Radius ausmacht. Der Absolutwerth von $\mathfrak{u}$ kann dann gleich dem von $\mathfrak{u}_0$ genommen werden, denn $\mathfrak{K} t$, das sich zu $\Theta \mathfrak{u}_0$ geometrisch summirt, steht senkrecht zu $\mathfrak{u}_0$, bringt also neben der kleinen Richtungsänderung nur eine von der zweiten Ordnung kleine Grössenänderung zu Stande. Wir verlangen also, dass Qst höchstens ein Tausendstel von Θu_0 ausmacht. Da nun t zu zehn Umläufen gehören sollte, also gleich

$$\frac{20\pi}{u_0}$$

gesetzt werden muss, erhalten wir die Ungleichung

$$\Theta u_0 > 1000\, Qs \frac{20\pi}{u_0}$$

und hiernach muss

$$u_0 > \sqrt{\frac{20\,000\,\pi\, Q s}{\Theta}}$$

sein. Anstatt mit Q, s und Θ zu rechnen, können wir einfacher auf Grund von Gl. (76) die reducirte Pendellänge l einführen, die dem Kreisel zukäme, wenn er als Pendel vom Auflagerpunkte herabhinge und einfache Pendelschwingungen ausführte. Die Bedingung für u_0 lautet dann

$$u_0 > \sqrt{\frac{20\,000\,\pi g}{l}}.$$

Wir wollen an einem Zahlenbeispiele sehen, was für ein Werth dies ist. Hierzu setzen wir $l = 3{,}14$ cm und erhalten

$$u_0 > 4315 \text{ sec}^{-1}$$

oder, wenn man auf Umdrehungen in der Secunde umrechnet, muss der Kreisel in der Secunde ungefähr 700 Umdrehungen machen.

Das ist freilich eine enorme Geschwindigkeit, die praktisch höchstens einmal gelegentlich bei einer Laval'schen Dampfturbine erreicht wird. Wir haben aber auch alle Annahmen so getroffen, dass u_0 besonders gross werden musste. Nimmt man dagegen z. B. an, 1) dass $l = 31{,}4$ cm wird, 2) dass es genügt, wenn sich nur während eines Umlaufs der Figurenaxe um die Umdrehungsaxe diese noch nicht merklich verschoben habe, 3) dass unter einer „unmerklichen" Richtungsabweichung eine solche verstanden werden soll, die in Bogenmaass ausgedrückt höchstens gleich $\frac{1}{100}$ ist, 3) dass auch das statische Moment K nur $\frac{1}{10}$ von Qs beträgt, so braucht die Umdrehungsgeschwindigkeit u_0 nur noch mindestens sieben Umdrehungen in der Secunde zu betragen, um die Zulässigkeit der Betrachtungen, die zu Gl. (122) führten, unter gewöhnlichen Umständen hinreichend zu sichern.

Im Uebrigen brauchen wir uns aber auch durch den unter den strengeren Anforderungen ermittelten Werth von u_0 nicht stören zu lassen. Schon aus der Erfahrung ist ja hinreichend bekannt, dass die Eigenthümlichkeiten der Kreiselbewegung, für die wir eine Erklärung suchen, um so stärker oder um so reiner hervortreten, je schneller der Kreisel rotirt. Es ist daher ganz in der Ordnung, wenn wir bei der Untersuchung der Kreiselbewegung von der Annahme einer ganz besonders grossen Winkelgeschwindigkeit ausgehen; wir bekommen dann die einfachsten Erscheinungen, die wir erwarten können und müssen nur bei der Anwendung auf einen bestimmten Fall im Auge behalten, dass sich Abweichungen davon um so mehr geltend machen werden, je kleiner die Winkelgeschwindigkeit thatsächlich ist. Aber auch selbst wenn die Winkelgeschwindigkeit schon verhältnissmässig klein geworden ist, wird der Vergleich mit den bei grossen Geschwindigkeiten zu erwartenden Gesetzmässigkeiten von Nutzen sein. Wenn die Erscheinung dann auch nur noch in grossen Zügen mit jener beim schnell bewegten Kreisel übereinstimmt, so werden wir doch ein besseres Verständniss der Bewegung durch jenen Vergleich vorbereiten.

Wenn die Zeit t, während der das Moment $\mathfrak{K}$ wirkte, abgelaufen ist, bewegt sich der Kreisel um die zuletzt erlangte Umdrehungsaxe stetig weiter, da diese (beim Kugelkreisel) jedenfalls eine freie Axe ist. Der ganze Erfolg des Stosses $\mathfrak{K}t$ bestand demnach darin, die Rotationsaxe $\mathfrak{u}$ gegen den festen Raum um einen Winkel φ zu drehen, der

$$\varphi = \frac{Kt}{\Theta u}$$

ist. Gegen den Kreisel selbst (oder relativ zur Figurenaxe) erfährt übrigens die Momentanaxe $\mathfrak{u}$ ebenfalls eine gewisse Verschiebung, wie schon aus den über diese Relativverschiebung im vorigen Paragraphen angestellten Betrachtungen hervorgeht. Auf S. 195 komme ich darauf noch ausführlicher zurück.

Wäre der Kreisel in Ruhe gewesen, als er den Stoss $\mathfrak{K}t$ empfing, so hätte er durch ihn eine Winkelgeschwindigkeit

$$\mathfrak{u} = \frac{\mathfrak{K}t}{\Theta}$$

erlangt, die parallel zu $\mathfrak{K}$ ist. Daher drehte sich in diesem Falle der ganze Kreisel um eine Axe, die mit $\mathfrak{K}$ parallel ginge und während der Zeit t um einen Winkel ψ, der

$$\psi = \frac{1}{2}\frac{Kt^2}{\Theta}$$

wäre. Der Winkel ψ wird gewöhnlich schon grösser sein, als der Winkel φ, da wir t gross genug annahmen, um während dessen einige Umdrehungen zuzulassen, so dass also ut ein Mehrfaches von 2π ist. Der Hauptunterschied besteht aber darin, dass der Winkel ψ nach Aufhören des Stosses immer weiter wächst, während φ nicht mehr wächst. Im einen Falle wird also (ganz in Uebereinstimmung mit den Beobachtungen) durch den Stoss $\mathfrak{K}t$ nur eine geringe Ablenkung der Kreisellage bewirkt, die nachher wieder einem benachbarten stationären Zustande Platz macht, während im anderen Falle der geringste Stoss schon dazu genügt, den Kreisel von seiner ursprünglichen Lage immer weiter zu entfernen.

Ganz besonders ist aber auch noch auf den Unterschied zwischen den Richtungen zu achten, nach denen der Kreisel unter dem Einflusse eines Stosses ausweicht. Wenn er aufrecht rotirt und die horizontale Kraft $\mathfrak{P}$ wirkt auf ihn ein, wie in Abb. 27, so steht das Moment $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{P}$ senkrecht zu $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{u}_0$ geht durch $\frac{\mathfrak{K}t}{\Theta}$ in $\mathfrak{u}$ über, also so, dass die Drehaxe nicht in der Richtung von $\mathfrak{P}$, sondern senkrecht dazu ausweicht. Dies gilt allerdings zunächst nur von der Drehaxe und nicht von der Figurenaxe. Auch gegen die Figurenaxe verschiebt sich $\mathfrak{u}$ um gleich viel. Wenn also vorher die Figurenaxe und die Drehaxe zusammenfielen, so trifft dies nach dem Stosse nicht mehr zu; die Figurenaxe beschreibt vielmehr nachher einen Kegel um die Drehaxe $\mathfrak{u}$. Die mittlere Richtung der Figurenaxe fällt dabei indessen immer noch mit der Axe $\mathfrak{u}$, die sie umkreist, zusammen.

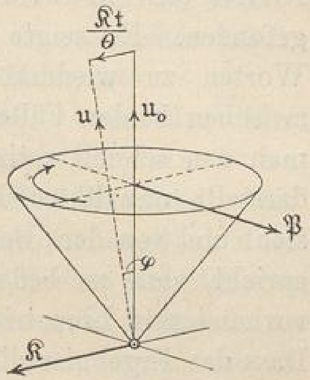

Abb. 27.

Rotirte der Kreisel dagegen zu Anfang nicht, so bewegt er sich einfach im Sinne der Kraft $\mathfrak{P}$. Die Axe $\mathfrak{u}$, die hierbei entsteht, steht zwar auch senkrecht zu $\mathfrak{P}$; darauf achtet man aber bei dieser langsamen Bewegung nicht weiter; man hält sich nur an den handgreiflichen Umstand, dass sich die Figurenaxe im Sinne der Kraft $\mathfrak{P}$ bewegt. Von der Figurenaxe gilt dies im ersten Augenblicke übrigens auch beim rotirenden Kreisel. Auch hier weicht sie unmittelbar nach dem Stosse in Richtung der Kraft $\mathfrak{P}$ aus. Sie entfernt sich aber dabei von der Umdrehungsaxe $\mathfrak{u}$, die sie nach dem Stosse umkreist. Wegen des Umkreisens, das nachher eintritt, gelangt die Ausweichung im ersten Augenblicke nach der Richtung von $\mathfrak{P}$ hin kaum zur Beobachtung (namentlich bei sehr schneller Rotation) und im Ganzen wird die mittlere Richtung nach derselben Seite wie $\mathfrak{u}$, also senkrecht zu $\mathfrak{P}$ verschoben. Mit dieser Betrachtung hat jene Eigenschaft des rotirenden Kreisels, die wohl als die merkwürdigste zu bezeichnen ist, dass er sich nämlich im Mittel genommen senkrecht zur Richtung der an ihm angreifenden Kraft $\mathfrak{P}$ „bewegt", während der ruhende Kreisel sich in der Richtung von $\mathfrak{P}$ bewegt, ihre Erklärung gefunden. Es zeigte sich, um es noch einmal mit anderen Worten zu wiederholen, dass der scheinbare Widerspruch zwischen beiden Fällen nur dadurch hervorgebracht wird, dass man den schnell rotirenden Kreisel, so wie er sich dem Auge darstellt, unwillkürlich als einen ungefähr ruhenden Körper ansieht und von der „Bewegung" dieses ruhend gedachten Körpers spricht, ohne zu bedenken, dass jede Bewegung zu der schon vorhandenen hinzutritt und sich mit dieser zusammensetzt. Dass das Ergebniss dieser Zusammensetzung eine ganz von der ohne Anfangsbewegung zu Stande kommenden Verschiebung des Körperumrisses verschiedene sein kann, ist leicht einzusehen.

Bisher nahm ich immer an, dass auf die Schwerkraft nicht geachtet zu werden brauchte. Von jetzt ab wollen wir diese mit heranziehen. *Zunächst sei angenommen, dass die Umdrehungsaxe des Kreisels anfänglich genau senkrecht stand, die Figurenaxe (oder „Kreiselaxe") dagegen nicht genau mit der Umdrehungsrichtung zusammenfiel.* Das statische Moment des Gewichts ist dann im Mittel gleich Null, denn der Schwerpunkt umkreist die Lothrechte. Nach längerer Zeit kann sich daher auch $\mathfrak{u}$ nach Gl. (12) nicht geändert haben. Die Bewegung wird also ohne Unterlass in derselben Weise fortgehen. Freilich ist wohl zu beachten, dass $\mathfrak{K}$ nicht wirklich in jedem Augenblicke, sondern nur im Durchschnitte gleich Null ist. Infolge dessen wird auch $\mathfrak{u}$ Richtungsänderungen von sehr geringem Betrage erleiden, die sich nur nach Ablauf eines Umlaufes, also schon in sehr kurzer Zeit vollständig wieder ausgeglichen haben. Auch die Figurenaxe beschreibt nicht genau einen Kreiskegel, sondern es kommen geringe schnell aufeinanderfolgende und sich gegenseitig tilgende Abweichungen davon vor, die sich aber dem Beobachter wegen ihrer Kleinheit und kurzen Dauer kaum bemerklich machen können. — Uebrigens kann der Winkel zwischen Figurenaxe und Umdrehungsaxe im vorliegenden Falle auch schon recht gross sein, ohne dass sich an der Zulässigkeit dieser Schlüsse etwas änderte. Ist er klein, dann hat der Beschauer den Eindruck, als wenn der Kreisel sich gar nicht mehr bewegte, sondern im scheinbar labilen Gleichgewichte auf dem Auflägerpunkte balancirte.

Ferner sei jetzt vorausgesetzt, dass die Umdrehungsaxe $\mathfrak{u}_0$ des Kreisels anfänglich einen beliebigen Winkel β mit der Vertikalen bildete, während Figurenaxe und Umdrehungsaxe anfänglich nahe zusammenfielen. Wenn wir dann den Kreisel der Wirkung seines Gewichts überlassen, befindet er sich während der nächsten paar Umläufe unter denselben Bedingungen, wie der vorher betrachtete Kreisel, auf den ein Stoss $\mathfrak{K}t$ ausgeübt wurde. Wir können daher das, was wir dort fanden, auf den jetzt vorliegenden Fall übertragen. Zunächst ist daran zu erinnern, dass sich $\mathfrak{u}$ innerhalb der kleinen Zeit t der Richtung, aber nicht der Grösse nach ändert und dass diese Richtungsänderung aus Gl. (122) entnommen werden kann. Da $\mathfrak{Q}$ jederzeit lothrecht, $\mathfrak{K}$ daher jederzeit horizontal gerichtet ist, muss $\mathfrak{u}$ nach Gl. (122) dieselbe Vertikalprojektion behalten wie $\mathfrak{u}_0$ und da auch $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{u}_0$ selbst von gleicher Grösse sind, folgt, dass sie gleiche Winkel mit der lothrechten Richtung bilden. In der kleinen Zeit t hat daher $\mathfrak{u}_0$ gegen den festen Raum nur eine Drehung um die lothrechte Axe in die Lage $\mathfrak{u}$ beschrieben. Wenn das Gewicht von nun ab zu wirken aufhörte, würde sich der Kugelkreisel unverändert um $\mathfrak{u}$ weiter drehen.

Wir müssen uns noch fragen, wie sich innerhalb der ersten Zeit t die Drehaxe relativ zur Kreiselaxe verschiebt. Betrachten wir ein kleines Zeitelement dt, innerhalb dessen auch nur eine kleine Drehung udt erfolgt, so ist nach einer schon mehrfach benutzten Ueberlegung die während dt eintretende relative Verschiebung der Drehaxe gegen die Kreiselaxe gleich der absoluten Verschiebung von $\mathfrak{u}$ im Raume. Der Winkelabstand zwischen Drehaxe und Kreiselaxe wird sich daher innerhalb dt vergrössern, wenn ein auf der Einheitskugel von der Kreiselaxe zur Drehaxe gezogener Bogen grade in die Richtung von $\mathfrak{K}$ fällt. Die Kreiselaxe rotirt aber sehr schnell um die Drehaxe und nimmt innerhalb der ganzen Zeit t alle möglichen, mit der vorhandenen Winkelabweichung verträglichen, Stellungen zu ihr nach einander ein. Daraus folgt, dass sich für eine Anzahl von Umläufen, die in die Zeit t fallen, die kleinen Schwankungen des Winkels zwischen beiden Axen gegen einander ausgleichen. Nach Ablauf der Zeit t bleibt daher nur die Drehung von $\mathfrak{u}$ gegen den festen Raum übrig, während relativ zur Kreiselaxe keine bleibende Verschiebung zu Stande kommt.

Aus dieser Betrachtung merke man sich als besonders beachtenswerth, dass ein schnell um eine Axe, die nahe mit der Figurenaxe zusammenfällt, rotirender Kreisel durch einen Stoss nur dann eine merkliche bleibende Verschiebung der Drehaxe gegen die Figurenaxe erfahren kann, wenn sich der Stoss innerhalb einer so kurzen Zeit abspielt, dass sich der Kreisel inzwischen nur um einen Bruchtheil eines Umlaufs weiterdrehen konnte. Im anderen Falle verschiebt sich die Figurenaxe einfach mit der Drehaxe, d. h. mit der Richtung von $\mathfrak{B}$.

Nachdem wir uns über das Verhalten des Kreisels während der kleinen Zeit t Rechenschaft gegeben haben, bleibt nur übrig, den Stoss $\mathfrak{K}t$ in der neuen Lage immer von Neuem zu wiederholen, um die Bewegung während einer grösseren Zeit zu finden. Dabei ist nur zu beachten, dass sich jedesmal die mittlere Richtung der Kreiselaxe entsprechend der neuen Lage von $\mathfrak{u}$ etwas geändert hat. Jederzeit muss daher $\mathfrak{K}t$ rechtwinklig zu dem jeweiligen $\mathfrak{u}$ gerichtet angenommen werden. Dadurch kommt im Ganzen eine stetige Drehung von $\mathfrak{u}$ um die lothrechte Richtung heraus und die Kreiselaxe selbst folgt im Wesentlichen dieser Drehung von $\mathfrak{u}$, wobei nur noch hinzukommt, dass sie zugleich $\mathfrak{u}$ selbst umkreist. Die Bewegung der Kreiselaxe kann daher als eine epicycloidische bezeichnet werden.

Wegen der — von kleinen Schwankungen abgesehen — regelmässigen Umkreisung von $\mathfrak{u}$ um die lothrechte Richtung ähnelt dem äusseren Anblicke nach die Bewegung der regulären Präcession. Sie ist aber nicht mit ihr identisch, wie schon daraus hervorgeht, dass die Kreiselaxe bei dieser ebenfalls eine Kreiskegelfläche um die lothrechte Richtung beschreibt, während wir erkannt haben, dass sie in unserem Falle eine epicycloidische Bewegung ausführt. Wegen der erwähnten Aehnlichkeit mit der regulären Präcession hat Herr F. Klein die jetzt betrachtete Bewegung des Kreisels als die pseudoreguläre Präcession bezeichnet. Sie darf aber mit der regulären keineswegs verwechselt werden und namentlich dürfen die Rechnungen des vorigen Paragraphen, die sich auf die reguläre Präcession bezogen, im Allgemeinen auf die pseudoreguläre nicht angewendet werden. Nur die „langsame" reguläre Präcession schliesst sich der pseudoregulären in solcher Art an, dass sie als ein Sonderfall von ihr betrachtet werden kann. Daher stimmt auch die in Gl. (121a) für die Präcessionsgeschwindigkeit der „langsamen" Präcession aufgestellte Formel mit der für die pseudoreguläre Präcession überein.

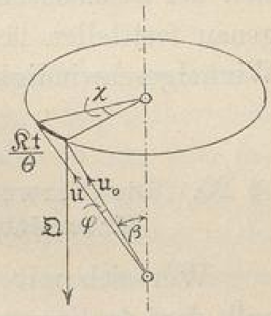

Abb. 28.

Die Umlaufszeit T bei der pseudoregulären Präcession kann leicht berechnet werden. Der Winkel, den $\mathfrak{u}$ mit der lothrechten Richtung bildet, sei wieder mit β bezeichnet. Dann ist

$$K = Qs \sin \beta.$$

Der Endpunkt von $\mathfrak{u}$ beschreibt in T einen Kreis vom Halbmesser $u \sin \beta$ (vgl. Abb. 28, in der die Figur des Kreisels selbst weggelassen ist). Während t wird der Kreisbogen $\frac{Kt}{\Theta}$ durchlaufen. Daraus folgt für den zugehörigen Centriwinkel χ

$$\chi = \frac{Kt}{\Theta u \sin \beta} = \frac{Qst}{\Theta u}$$

und für die Präcessionsgeschwindigkeit w

$$w = \frac{\chi}{t} = \frac{Qs}{\Theta u}$$

in Uebereinstimmung mit Gl. (121a). Da der Kreis mit constanter Winkelgeschwindigkeit durchlaufen wird, ist

$$T = \frac{2\pi}{\chi} t = \frac{2\pi u \Theta}{Qs}. \tag{123}$$

Die Präcession erfolgt demnach um so langsamer, je grösser die Winkelgeschwindigkeit u ist und die Geschwindigkeit der Präcession ist zugleich unabhängig von der Neigung β des mittleren Ortes der Kreiselaxe (während einer Kreiseldrehung) gegen die Lothrechte. Diese Folgerungen stehen mit den aus dem Experiment oder auch schon von dem Spielkreisel her bekannten Erfahrungen in bester Uebereinstimmung.

Führt man auch hier die reducirte Pendellänge l des Kreisels ein, so vereinfacht sich Gl. (123) zu

$$T = 2\pi \frac{lu}{g}. \tag{124}$$

Man kann also z. B. mit Hülfe dieser Gleichung aus der langsam erfolgenden Präcessionsbewegung, deren Umlaufszeit T sich bei Beobachtung einer Kreiselbewegung leicht hinreichend genau feststellen lässt, ohne Weiteres schliessen, wie gross die Winkelgeschwindigkeit u der Drehung ist.

§ 25. Die Verwendung der Kreiseltheorie in der Praxis. Uebersicht über verwandte Bewegungen.

Wer sich mit den Lehren der Mechanik vertraut machen will, darf das Interesse, das er einem Probleme entgegenbringt, nicht ausschliesslich von dem unmittelbaren Nutzen abhängig machen, der sich daraus für die Anwendungen in der technischen Praxis ergiebt. Er muss von selbst das Bedürfniss empfinden, über einen Bewegungsvorgang von so ausgesprochener Eigenart wie die Kreiselbewegung, ein klares Urtheil zu gewinnen, auch dann, wenn sich die Möglichkeit einer unmittelbaren praktischen Anwendung der vorgetragenen Theorie nicht voraussehen lässt. Nur hierdurch kann die Fähigkeit zur schätzungsweisen Beurtheilung verwickelter Bewegungsvorgänge gewonnen werden, wie sie in der Praxis schon heute gelegent-