Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1901

§. 25. Die Verwendung der Kreiseltheorie in der Praxis. Uebersicht über verwandte Bewegungen

urn:nbn:de:hbz:466:1-84695

in Uebereinstimmung mit Gl. (121a). Da der Kreis mit constanter Winkelgeschwindigkeit durchlaufen wird, ist

$$T = \frac{2\pi}{\chi} t = \frac{2\pi u \Theta}{Q s}. \tag{123}$$

Die Präcession erfolgt demnach um so langsamer, je grösser die Winkelgeschwindigkeit u ist und die Geschwindigkeit der Präcession ist zugleich unabhängig von der Neigung β des mittleren Ortes der Kreiselaxe (während einer Kreiseldrehung) gegen die Lothrechte. Diese Folgerungen stehen mit den aus dem Experiment oder auch schon von dem Spielkreisel her bekannten Erfahrungen in bester Uebereinstimmung.

Führt man auch hier die reducirte Pendellänge l des Kreisels ein, so vereinfacht sich Gl. (123) zu

$$T = 2\pi \frac{l u}{g}. \tag{124}$$

Man kann also z. B. mit Hülfe dieser Gleichung aus der langsam erfolgenden Präcessionsbewegung, deren Umlaufszeit T sich bei Beobachtung einer Kreiselbewegung leicht hinreichend genau feststellen lässt, ohne Weiteres schliessen, wie gross die Winkelgeschwindigkeit u der Drehung ist.

§ 25. Die Verwendung der Kreiseltheorie in der Praxis. Uebersicht über verwandte Bewegungen.

Wer sich mit den Lehren der Mechanik vertraut machen will, darf das Interesse, das er einem Probleme entgegenbringt, nicht ausschliesslich von dem unmittelbaren Nutzen abhängig machen, der sich daraus für die Anwendungen in der technischen Praxis ergiebt. Er muss von selbst das Bedürfniss empfinden, über einen Bewegungsvorgang von so ausgesprochener Eigenart wie die Kreiselbewegung, ein klares Urtheil zu gewinnen, auch dann, wenn sich die Möglichkeit einer unmittelbaren praktischen Anwendung der vorgetragenen Theorie nicht voraussehen lässt. Nur hierdurch kann die Fähigkeit zur schätzungsweisen Beurtheilung verwickelter Bewegungsvorgänge gewonnen werden, wie sie in der Praxis schon heute gelegentlich vorkommen und bei dem Streben des heutigen Maschinenbaues nach Einführung immer höherer Umlaufsgeschwindigkeiten bei vielen Maschinengattungen in Zukunft voraussichtlich noch häufiger vorkommen werden.

Man muss also bereit sein, zum mindesten schätzungsweise die vorausgehenden Lehren auch auf andere Fälle zu übertragen. Dass man sich bei einer solchen Schätzung gelegentlich auch einmal irren kann, ist freilich kaum zu vermeiden; die Gefahr ist aber um so geringer, je genauer man sich mit dem als Ausgangspunkt gewählten einfacheren Falle vertraut gemacht hat. Als nächster Gegenstand eines solchen Abschätzungsversuchs möge das Problem des blos symmetrischen Kreisels gewählt werden, der kein Kugelkreisel mehr ist. Dieser Fall kann freilich auch streng behandelt werden, wenn man die Mühe nicht scheuen will. Aus schon mehrfach erwähnten Gründen thue ich dies aber hier nicht; ich betrachte vielmehr umgekehrt das Problem des blos symmetrischen Kreisels als ein ganz willkommenes Beispiel für die Möglichkeit der erwähnten Abschätzungen.

In erster Linie wird man sich beim symmetrischen Kreisel für die pseudoreguläre Präcession interessiren. Gegenüber dem Kugelkreisel tritt hier der erschwerende Umstand ein, dass die Richtung der Rotationsaxe $\mathfrak{u}$ und die Richtung des Dralls $\mathfrak{B}$ nicht mehr zusammenfallen. Wenn die augenblickliche Richtung von $\mathfrak{B}$ gegeben ist, findet man, wie wir aus den früheren Untersuchungen wissen, die Richtung von $\mathfrak{u}$, indem man eine senkrecht zu $\mathfrak{B}$ stehende Tangentialebene an das Trägheitsellipsoid legt und nach dem Berührungspunkte vom festen Punkte aus einen Strahl zieht. Bedingung für das Zustandekommen der pseudoregulären Präcession war aber schon früher, dass $\mathfrak{u}$ nicht viel von der Figurenaxe abwich; an dieser Bedingung müssen wir daher jedenfalls auch hier festhalten. Die Figurenaxe ist aber eine Hauptträgheitsaxe und so lange $\mathfrak{u}$ nicht viel von dieser abweicht, kann auch $\mathfrak{B}$ von beiden nur wenig abweichen. Ausserdem liegen $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{u}$ und die Figurenaxe in einer Ebene. Wenn keine äussere Kraft wirkte, wäre die

Richtung von $\mathfrak{B}$ fest und $\mathfrak{u}$ und die Figurenaxe umkreisten $\mathfrak{B}$. Diese Umkreisung findet auch noch statt, wenn wir, wie im vorigen Paragraphen, während einer kleinen Zeit t eine äussere Kraft einwirken lassen, die $\mathfrak{B}$ nicht merklich zu ändern vermag, in der aber doch eine oder mehrere Umdrehungen stattfinden. Wir entnehmen daraus, dass wir die früheren Betrachtungen auch auf den vorliegenden Fall anwenden können, wenn wir nur $\mathfrak{B}$ an die Stelle von $\mathfrak{u}$ treten lassen. Jetzt ist es der Vektor $\mathfrak{B}$, der sich — von geringfügigen Schwankungen abgesehen — um die lothrechte Richtung langsam dreht und der die Richtungen der Figurenaxe und der Umdrehungsaxe in seine Nähe fesselt und sie dadurch mit herumführt. Da ausserdem sehr nahezu $B = u\Theta$ gesetzt werden kann, lässt sich demnach die Formel (123) für die Dauer eines Umlaufs auch auf diesen Fall übertragen. Unter Θ ist aber jetzt das Trägheitsmoment für die Figurenaxe zu verstehen und Gl. (124) kann daher nicht mit übernommen werden.

Erheblich einfacher als die Kreiseltheorie selbst ist übrigens eine mit dieser verwandte Betrachtung, die sich auf die Drehung eines Schwungrings aus seiner Ebene heraus bezieht und die an dieser Stelle Erwähnung finden möge. Der Ring sitze auf einer schnell rotirenden Welle und das Gestell, in dem die Welle gelagert ist, möge vergleichsweise langsam irgend eine vorgeschriebene Bewegung ausführen. Man denke etwa an einen solchen Schwungring, der auf einer Lokomotive angebracht sein mag. Wenn die Lokomotive eine Curve durchfährt, wird die Ebene des Schwungrings langsam gedreht. Die daneben stattfindende Translation ist hierbei gleichgültig und der Einfachheit halber wollen wir desshalb ganz von ihr absehen.

In Abb. 29 ist der Schwungring in seiner Anfangslage durch ausgezogene Striche angegeben. Die horizontale Welle, auf der er sitzt, möge durch eine Bewegung des Fahrzeugs genöthigt werden, in einer gewissen Zeit t in die durch punktirte Linien angegebene neue Lage einzurücken. Natürlich müssen, um diese Bewegung zu erzwingen, Kräfte von dem Fahrzeuge auf die Welle und durch deren Vermittlung auf das Schwungrad übertragen werden. Unter Umständen können diese sehr gross werden, so dass sie bei ungenügender Festigkeit zu einer Zerstörung der Welle oder zu einem Herausschleudern der Welle aus den Lagern zu führen vermöchten; jedenfalls wird man sich daher Rechenschaft darüber zu geben haben, von welcher Art diese Kräfte sind und wie gross sie sind.

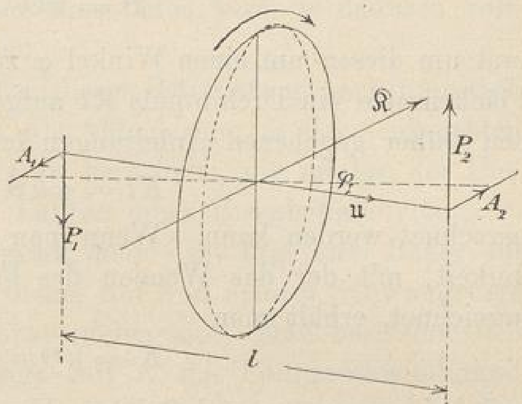

Abb. 29.

Von dem Schwungrade nehme ich an, dass es richtig ausgeglichen und genau auf die Welle aufgekeilt sei, so dass bei stillstehendem Fahrzeuge nur eine Bewegung um eine freie Axe in Frage kommt. Die Lager der Welle haben dann nur das Gewicht und etwaige sonstige Belastungen aufzunehmen, genau so, als wenn der Schwungring ebenfalls in Ruhe wäre. Diese Auflagerkräfte werden auch später noch neben den anderen, die wir suchen, weiter bestehen; sie sind aber verhältnissmässig gering und es soll desshalb weiterhin nicht ausdrücklich von ihnen die Rede sein, vielmehr soll das Schwungrad so behandelt werden, als wenn es gewichtslos (aber nicht masselos) wäre.

Um die angegebene Drehung um die lothrechte Axe auszuführen, wird man natürlich zunächst einmal ein Kräftepaar anbringen müssen, das diese Drehung auch bei dem ruhenden Schwungringe zu Stande brächte. Vorher war nämlich die Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ des Schwungrings horizontal; um diesen in die neue Lage überzuführen, müssen wir ihn aber um die lothrechte Axe drehen, ihm also eine vertikale Winkelgeschwindigkeit ertheilen. Dies kann etwa durch das in Abb. 29 mit $A_1 A_2$ bezeichnete Kräftepaar geschehen. Wenn der Schwungring während der Drehung des Fahrzeuges nicht rotirte, wäre von den Lagern nur einfach dieses Kräftepaar auf die Welle zu übertragen. Sobald aber der Schwungring schnell umläuft, tritt dazu ein anderes von weit grösserem Betrage. Der Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ entspricht nämlich ein Drall $\mathfrak{B}$

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{u}\,\Theta$$

und um diesen um einen Winkel φ zu drehen, muss nach dem Flächensatze ein Drehimpuls $\mathfrak{K}t$ aufgewendet werden, der nach den früher gegebenen Anleitungen leicht zu

$$Kt = \varphi u \Theta$$

berechnet werden kann. Wenn man also die Winkelgeschwindigkeit, mit der das Wenden des Fahrzeuges erfolgt, mit w bezeichnet, erhält man

$$K = u\Theta w \tag{125}$$

und bei grossem u und Θ kann dies selbst für kleine Werthe von w schon sehr beträchtlich werden. Die Richtung des jetzt der Grösse nach berechneten Moments $\mathfrak{K}$ folgt ebenfalls daraus, dass $\mathfrak{B}$ durch geometrische Summirung von $\mathfrak{K}t$ in den neuen Werth übergeht. In die Abbildung ist der Pfeil von $\mathfrak{K}$ eingetragen. Dieses Moment $\mathfrak{K}$ kann von den Lagern nur in Form eines Kräftepaars übertragen werden, so dass jedes der beiden Lager eine Kraft des Paares überträgt. Auch diese mit $P_1 P_2$ bezeichneten Auflagerkräfte sind in Abb. 29 eingetragen worden; die Pfeile ergeben sich aus den früheren Festsetzungen über den Zusammenhang des Drehsinnes eines Kräftepaares mit dem Pfeile des dazu gehörigen Momentenvektors. Dass die beiden Auflagerkräfte $P_1 P_2$ wirklich von gleicher Grösse sein müssen, folgt übrigens einfach daraus, dass sich der Schwerpunkt des ganzen Systems nicht in vertikaler Richtung verschiebt. Wenn man die Länge der Welle mit l bezeichnet, hat man für jede dieser Kräfte

$$P_1 = P_2 = \frac{u\Theta w}{l}.$$

Wir sprachen bisher von den Kräften, die vom Gestelle auf die Welle und den Schwungring übertragen werden. Am Fahrzeuge selbst kommen die Reaktionen dieser Kräfte in Betracht; wenn wir die Beanspruchung des Fahrzeugs durch diese Auflagerkräfte untersuchen wollen, müssen wir daher die Pfeile umkehren. Wir sehen daraus, dass das Fahrzeug am linken Lager der Welle (in der Abbildung) gehoben, am anderen niedergedrückt wird. Unter Umständen kann es dadurch vollständig umgeworfen werden.

Natürlich kann man von dieser Betrachtung auch unmittelbar Gebrauch machen, um die Abänderung in der senkrechten Componente des Raddrucks zu berechnen, die infolge der Umdrehung der Räder beim Fahren eines Eisenbahnfahrzeugs in einer Curve zu Stande kommt, denn dass hier zwei Räder auf einer Axe sitzen, während bisher nur von einem Schwungringe die Rede war, macht offenbar nichts aus. Man bezeichne den Halbmesser des Radumfangs mit r, die Fahrgeschwindigkeit des Eisenbahnzugs mit v, den Krümmungshalbmesser des Geleises mit R, so wird

$$u = \frac{v}{r} \quad \text{und} \quad w = \frac{v}{R}$$

also

$$P_1 = P_2 = \frac{v^2 \Theta}{R r l}.$$

Unter Θ ist jetzt das Doppelte vom Trägheitsmomente eines einzelnen Rades zu verstehen, unter l die Spurweite. Betrachtet man zum Zwecke einer Abschätzung ein Rad nur als einfachen Reifen vom Radius r und vom Gewichte Q, so kann näherungsweise (aber sicher etwas zu gross) $\Theta = 2\,\frac{Q}{g}\,r^2$ gesetzt werden und die vorige Gleichung geht damit über in

$$P_1 = P_2 = Q \cdot \frac{2 v^2 r}{g R l}.$$

Wenn v so gross wird, dass der als Faktor von Q auftretende Bruch gleich Eins wird, sinkt der Raddruck auf der nach innen hin gelegenen Schiene um das ganze Gewicht eines Rades. Eine allein auf dem Geleise dahin rollende, mit zwei aufgekeilten Rädern versehene Axe müsste bei Ueberschreitung der angegebenen Geschwindigkeit entgleisen.

Setzt man etwa $r = 1$ m (Lokomotivräder sind zuweilen so hoch), $R = 200$ m (scharfe Curve, wie sie aber bei Weichen u. s. f. vorkommt) und $l = 1{,}435$ m (Normalspur der Haupteisenbahnen), so erhält man für die fragliche Geschwindigkeit

$$v = 37{,}5 \text{ m sec}^{-1}.$$

Ein Rad, das ganz besonders schnell umläuft, ist das Laufrad einer Laval'schen Dampfturbine. Man denke sich eine solche auf einem Schiffe montirt und das Schiff möge die schaukelnden Bewegungen ausführen, die bei einem heftigen Sturme eintreten können. Wenn die Welle der Laval'schen Turbine steif construirt wäre, müsste sie nach Gl. (125) ein sehr erhebliches Kräftepaar K übertragen, um das Rad aus seiner Rotationsebene abzulenken, denn hier ist nicht nur u ungewöhnlich gross, sondern auch w, die Winkelgeschwindigkeit, mit der das Schiff seine pendelnde Bewegung ausführt, ist nicht allzuklein. Um ein Zahlenbeispiel anzuführen, setze man etwa $u = 2000 \text{ sec}^{-1}$ (entsprechend etwa 19000 Touren in der Minute), $w = 0{,}2 \text{ sec}^{-1}$, das Gewicht des Laufrads gleich 100 kg und den Trägheitsradius gleich 0,2 m. Dann wird nach Gl. (125)

$$K = 163 \text{ mkg}.$$

Das Kräftepaar wirkt verbiegend auf die Welle. Die Welle ist aber so dünn construirt, dass sie sich schon bei kleinen Biegungsmomenten ziemlich stark verbiegt. Desshalb folgt die Rotationsebene des Rades nur zum Theile den Schwingungen des Schiffskörpers. Wenn die Welle ganz biegsam wäre, würde sich die Rotationsebene des Rades überhaupt nicht verrücken; sie würde im Raume feststehen und die durch die Schwingungen des Schiffes hervorgerufenen relativen Bewegungen würden in den Verbiegungen der Welle allein zum Ausdrucke kommen. Auch über die der pseudoregulären Präcession des Kreisels verwandten Bewegungserscheinungen, die das Laufrad zeigt, wenn der Schiffskörper etwa einfache Sinusschwingungen ausführt, vermag man sich leicht ungefähre Rechenschaft zu geben, falls man aus hinreichenden Angaben über die Stärke der Welle, den Elasticitätsmodul und die Entfernungen des

Rades von den Lagern die elastische Verbiegung der Welle für ein Biegungsmoment $K = 1$ mkg nach den Sätzen der Festigkeitslehre zuvor berechnet hat.

Bei dem eben besprochenen Beispiele konnte die Masse des Laufrades als so gering gegenüber dem schwingenden Schiffskörper angesehen werden, dass man auf die Rückwirkung, die es auf diesen ausübt, nicht zu achten brauchte. Unter anderen Umständen kann dies aber nöthig werden; man muss sich dann erinnern, dass das von dem rotirenden Rade auf das Fahrzeug ausgeübte Kräftepaar dieses nicht im Sinne der Hauptdrehung, die es ausführt, sondern um eine rechtwinklig dazu stehende Axe zu drehen sucht. Es wird nicht nöthig sein, dies noch weiter auszuführen, da schon bei dem Beispiele des Schwungrings auf der Lokomotive darauf eingegangen wurde.

Ein ferneres Beispiel für Betrachtungen dieser Art bildet der Bumerang. Auf dessen Beschreibung selbst will ich hier zwar nicht eingehen, sondern ihn durch ein einfacheres Beispiel ersetzen, bei dem der Bewegungsvorgang im Wesentlichen der gleiche ist. Man denke sich eine Scheibe (den Diskus der Alten) fortgeworfen, indem man ihr zugleich eine schnelle Drehung um die auf der Scheibenebene senkrechte Figurenaxe ertheilt. Wenn der Wurf durch den luftleeren Raum erfolgte, würde der Schwerpunkt der Scheibe einfach eine Parabel beschreiben und die Rotationsaxe, die eine freie Axe ist, behielte unverändert ihre Richtung im Raume; die Scheibenebene würde also stets der Anfangslage parallel bleiben. Im lufterfüllten Raume kann aber die Bewegung nicht in dieser Weise erfolgen. Der Luftwiderstand wird sehr gross, sobald die Scheibenebene nicht mehr parallel zur Bewegungsrichtung ist. Wie sich der Luftwiderstand im vorliegenden Falle im Einzelnen vertheilt, ist freilich schwer zu sagen; wir wollen es aber, um nicht in eine Erörterung darüber eintreten zu müssen, als ausgemacht ansehen, dass er sich jedenfalls in solcher Weise geltend macht, dass ein merkliches Heraustreten der Scheibenebene aus der Bewegungsrichtung durch ihn verhütet wird. Ausserdem wird eine merkliche Aenderung des Dralls $\mathfrak{B}$ der sehr schnell rotirenden Scheibe so bald nicht zu erwarten sein. Dann kann sich die Scheibe nahezu nur innerhalb der Ebene bewegen, die durch die Anfangslage der Scheibe gegeben ist. Der Bewegungsvorgang ist demnach ungefähr derselbe, als wenn die unterhalb an die Scheibenfläche angrenzende Luft sich wie eine starre schiefe Ebene verhielte, die sich jeder Bewegung rechtwinklig zu ihr widersetzte. An Stelle der in einer lothrechten Ebene liegenden gewöhnlichen Wurfparabel muss jetzt der Schwerpunkt der Scheibe eine in der ursprünglichen Scheibenebene liegende Bahn beschreiben. Wenn er sich anfänglich senkrecht zur Horizontalspur der Scheibenebene nach oben hin bewegte, wird er sich in dieser schief nach aufwärts gehenden geraden Linie bis zu einem höchsten Punkte hin bewegen und nachdem er diesen erreicht hat, dieselbe Bahn in umgekehrter Richtung zurück durchlaufen und so zum Ausgangspunkte zurückkehren. Wirft man die Scheibe in horizontaler Richtung, so wird sie nahezu in gerader horizontaler Richtung weiterfliegen und wenn die vorausgehenden Betrachtungen streng anwendbar wären, müsste sie, allen Fallgesetzen zum Trotze, beliebig weit fortfliegen können, ohne zu sinken. Das ist natürlich nicht genau richtig; man wird sich aber erinnern, dass geschickte Taschenspieler in ihren Vorstellungen gelegentlich Spielkarten mit grosser Kunstfertigkeit so hinausschleudern, dass sie in der That weite Strecken durcheilen, ohne in gewohnter Weise aus der Wurfrichtung abgelenkt zu werden und das, was ich vorher auseinandersetzte, giebt wenigstens eine ungefähre Erklärung des Vorganges, der dem beim Werfen des Bumerangs gleicht.

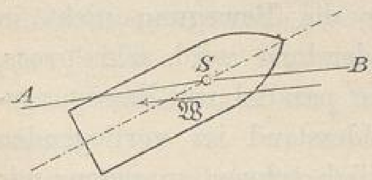

Abb. 30.

Auch die bekannte seitliche Ablenkung der aus gezogenen Geschützen abgeschossenen Wurfgeschosse gehört hierher. Der Luftwiderstand spielt hier nur eine andere Rolle. Wir wollen uns davon summarisch in folgender Weise Rechenschaft geben. In Abb. 30 sei AB ein Theil der Bahn des Schwerpunktes S. Wenn kein Luftwiderstand wirkte, hätte die Rotationsaxe ihre ursprüngliche Richtung beibehalten und die Granate würde etwa die in Abb. 30 gezeichnete Stellung einnehmen. Der Luftwiderstand, dem sie in dieser Lage begegnet, sei etwa durch $\mathfrak{W}$ angegeben. Es kommt dann wesentlich darauf an, wie der Schwerpunkt S gegen die Richtungslinie von $\mathfrak{W}$ liegt. Liegt er oberhalb, wie in der Figur, so gehört zu $\mathfrak{W}$ ein statisches Moment $\mathfrak{K}$, das eine Drehung der Granate in die Richtung der Flugbahn herbeizuführen sucht. Diese Drehung setzt sich aber mit jener zusammen, die die Granate schon um ihre Längsaxe ausführte. Der Erfolg wird, wie in den früheren analogen Fällen, zunächst darin bestehen, dass sich $\mathfrak{B}$ und mit ihm $\mathfrak{u}$ und die Figurenaxe aus der Ebene der Flugbahn etwas herausdrehen. Auch der Sinn dieser Ablenkung ist leicht festzustellen. Wenn das Geschütz mit Linksdrall versehen ist, haben wir $\mathfrak{u}$ vom Schwerpunkte aus nach oben hin abzutragen und $\mathfrak{B}$ ist mit ihm gleichgerichtet. Das Moment von $\mathfrak{W}$ dreht in der Abbildung im Sinne des Uhrzeigers und der Momentenvektor $\mathfrak{K}$ geht daher vom Zeichenblatte aus nach dem Beschauer hin. Vereinigen wir nun $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{K}t$, so erhalten wir eine Richtung, die nach vorn hin (d. h. nach dem Beschauer hin) etwas geneigt ist. Das vordere Ende der Granate zeigt daher auch nach dieser Richtung. Sobald das Geschoss im Grundrisse ein wenig schräg gestellt ist, erfährt es auf der vorausgehenden Seite einen grösseren Luftwiderstand, als auf der ein wenig nach hinten zu gedrehten. Es wird dadurch seitlich abgelenkt und zwar vom Geschütz aus gesehen nach rechts hin (bei Rechtsdrall nach links hin). Gerade die nun im Grundrisse etwas excentrische Angriffslinie des Winddrucks bringt dann ein statisches Moment hervor, das die Geschossaxe in die Richtung der Flugbahn dreht. — Natürlich soll diese Betrachtung nur eine ungefähre Vorstellung geben; im Einzelnen sind die pendelnden Bewegungen des Geschosses sehr verwickelt. Ausserdem ist auch darauf zu achten, dass die Seitenablenkung nach der entgegengesetzten Seite hin erfolgt, wenn der Schwerpunkt S in Abb. 30 unterhalb von $\mathfrak{W}$ liegt. Bei den gewöhnlich verwendeten Geschossformen scheint dies übrigens in der Regel der Fall zu sein.

Eng verwandt mit der Kreiselbewegung ist auch die Bewegung des rollenden Rades, die in unserer Zeit des Fahrradsports von allgemeinerem Interesse ist. Eine brauchbare Theorie des zweiräderigen Fahrrads ist, soweit mir bekannt ist, bisher nicht aufgestellt worden. Jedenfalls wird es auch, wenn sie einmal gegeben sein wird, immer noch viel leichter sein, das Radfahren praktisch zu erlernen, als die Theorie dieser Bewegung zu studiren. — Hier beschränke ich mich auf die Besprechung des einfachsten Falles der Bewegung eines einzelnen Rades unter dem Einflusse seines Gewichtes auf einer horizontalen Ebene.

Den Umfang des Radreifs denke ich mir etwas gewölbt, so dass das Rad — abgesehen von der elastischen Abplattung, die dabei entsteht — den Boden immer in einem Punkte berührt. Der Punkt, mit dem es im gegebenen Augenblicke auf dem Boden aufsitzt, möge als der Auflagerpunkt bezeichnet werden. Damit das Rad rollt, ohne zu gleiten, muss der Auflagerpunkt in augenblicklicher Ruhe sein, d. h. die Bewegung des Rades aus einer Lage in die folgende kann immer nur in einer Drehung um eine durch den Auflagerpunkt gezogene Axe bestehen. Die Richtung dieser Axe kann beliebig sein. In Abb. 31, die das Rad in irgend einer seiner Stellungen angiebt, ist die Richtung der Drehaxe und die Grösse der Winkelgeschwindigkeit durch den Vektor $\mathfrak{u}$ angegeben. Geschwindigkeiten kann man zerlegen wie Kräfte. Man thut hier am besten daran, $\mathfrak{u}$ nach drei zu einander rechtwinkligen Richtungen zu zerlegen, die in Abb. 31 durch die Richtungsfaktoren $\mathfrak{i}\ \mathfrak{j}\ \mathfrak{k}$ kenntlich gemacht sind. Die $\mathfrak{i}$-Richtung steht senkrecht

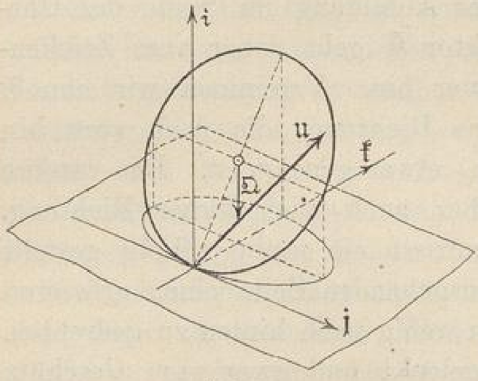

Abb. 31.

zum Fussboden, die $\mathfrak{j}$-Richtung fällt mit der Horizontalspur der Radebene zusammen und die $\mathfrak{k}$-Richtung ist schon durch die beiden vorigen mit bestimmt.

Die augenblickliche Bewegung des Rades kann man sich stets aus einem Zusammenwirken von Drehungen um die genannten Hauptrichtungen bestehend denken. Es wird daher nützlich sein, wenn man zunächst nur die Drehungen um jede der drei Hauptrichtungen für sich betrachtet. Zunächst möge das Rad nur eine Drehung um die $\mathfrak{i}$-Axe besitzen. Der Auflagerpunkt bleibt dann dauernd an seiner Stelle und das Rad kann einfach als ein Kreisel aufgefasst werden, der eine Präcessionsbewegung ausführt. Das Rad bildet freilich keinen Kugelkreisel und nicht einmal einen „symmetrischen" Kreisel und daher können die in § 23 für die reguläre Präcession abgeleiteten Formeln hier nicht übernommen werden Man muss vielmehr beachten, dass die Richtung von $\mathfrak{B}$ recht erheblich von der Richtung der Drehaxe abweichen wird. Im anderen Falle wäre auch eine dauernde Rotation um die $\mathfrak{i}$-Axe überhaupt ausgeschlossen, denn wir wissen schon, dass $\mathfrak{B}$ unter dem Einflusse des Gewichtes und des ihm zugehörigen statischen Moments eine Kegelfläche beschreiben muss. In der That kann aber nun eine reguläre Präcession stattfinden, und zwar so, dass jedem Neigungswinkel der Radebene gegen den Fussboden eine ganz bestimmte Winkelgeschwindigkeit um die $\mathfrak{i}$-Axe entspricht, die zu einer regulären Präcession führt. Ich erinnere nur an das bekannte Experiment, bei dem man einen Thaler auf einem Tische in dieser Weise rotiren lässt. Wenn die Winkelgeschwindigkeit abnimmt, neigt sich der Thaler immer mehr. Auch rechnerisch lässt sich der Zusammenhang zwischen Neigungswinkel und Winkelgeschwindigkeit um die $\mathfrak{i}$-Axe leicht verfolgen; ich sehe aber hier davon ab.

Drehungen um die $\mathfrak{j}$-Axe sind als Pendelbewegungen aufzufassen; volle Pendelschwingungen können hier freilich nicht zu Stande kommen, die Bewegung endet vielmehr mit dem Umfallen des Rades auf den Fussboden. Ueberdies ist auch zu beachten, dass schon vor dem vollständigen Umfallen ein

Gleiten des Rades auf dem Boden zu erwarten ist. Auch darüber kann man sich ohne Schwierigkeit Rechenschaft geben; am einfachsten wendet man dazu das d'Alembert'sche Princip an. Man betrachtet das fallende Rad in irgend einer seiner Stellungen, führt die Trägheitskräfte ein und ermittelt nach der Lehre vom Gleichgewichte eines starren Körpers den im Auflagerpunkte übertragenen Druck. Solange die Richtung des Auflagerdrucks noch innerhalb des Reibungskegels liegt, tritt kein Abgleiten ein; die Bewegung setzt sich vielmehr einstweilen noch so wie eine Pendelschwingung fort. Gegen das Ende der Bewegung hin wird man aber die Bedingung nicht mehr erfüllt finden und dann gleitet der Auflagerpunkt über den Fussboden.

Die beiden bis jetzt betrachteten Drehungen führen überhaupt nicht zu einem Rollen des Rades; dieses wird nur durch die Drehung um die $\mathfrak{k}$-Axe bewirkt. Freilich kann von einer dauernden Drehung um eine fest liegende $\mathfrak{k}$-Axe hier nicht die Rede sein; die Drehung führt sofort zu einem Wechsel des Auflagerpunktes und die $\mathfrak{k}$-Axe kann daher nur als Momentanaxe in Betracht kommen. Wir können uns aber eine Bewegung vorstellen, bei der in jeder neuen Lage des Rades die nach der gegebenen Vorschrift stets von Neuem construirte Richtung der $\mathfrak{k}$-Axe die augenblickliche Drehungsaxe angiebt. Eine solche Bewegung mag als eine rein rollende bezeichnet werden; im Gegensatze zu ihr kann die Drehung um die $\mathfrak{i}$-Axe als eine Wendung und die Drehung um die $\mathfrak{j}$-Axe als eine Fallbewegung des Rades bezeichnet werden, wobei im letzten Falle nicht ausgeschlossen ist, dass sie im gegebenen Augenblicke auch nach oben hin erfolgt.

Im allgemeinen Falle bestehen alle drei Bewegungscomponenten zugleich und sie beeinflussen sich gegenseitig. Ein besonderes Interesse kann aber die rein rollende Bewegung, die sich leicht theoretisch behandeln lässt, immerhin beanspruchen. Um sie zu untersuchen, denke man sich eine Senkrechte zur Radebene vom Radmittelpunkte aus gezogen. Sie trifft den Fussboden auf der $\mathfrak{k}$-Axe. Vom Schnittpunkte aus als Spitze denke man sich einen Kegel konstruirt, dessen Grundlinie der Radumfang ist und der mit dem Rade fest verbunden sein mag. Dann muss die Kegelspitze während der rollenden Bewegung des Rades dauernd in Ruhe bleiben, da sie in jedem Augenblicke auf der $\mathfrak{f}$-Axe, also auf der Momentanaxe enthalten ist. Wir können daher die Bewegung geradezu durch das Rollen des Kegels auf der Bodenfläche beschreiben, d. h. der Kegel bildet in Anlehnung an die früher eingeführten Bezeichnungen den Polodiekegel für die Bewegung um die als festen Punkt anzusehende Kegelspitze. Der Herpolodiekegel ist hier in eine ebene Fläche, nämlich in die Oberfläche des Bodens ausgeartet.

Von äusseren Kräften wirken auf das Rad das Gewicht und der Auflagerdruck. Die senkrechte Componente des Auflagerdrucks muss dem Gewichte gleich sein, da der Schwerpunkt des Rades Geschwindigkeitscomponenten in senkrechter Richtung weder besitzt noch erlangt. Daneben muss freilich zugleich eine Horizontalcomponente des Auflagerdrucks auftreten, die die Centripetalkraft für die vom Schwerpunkte ausgeführte kreisförmige Bewegung abgiebt. Die Horizontalcomponente geht hiernach in jedem Augenblicke durch die Kegelspitze und wenn wir den Flächensatz für die Kegelspitze als Momentenpunkt anwenden ist ihr Moment stets gleich Null.

Man sieht jetzt leicht, wie die Rechnung durchzuführen ist. Wenn das Rad im Anfangszustande gegeben ist, kennt man sofort die Kegelspitze, die von ihm bei der rein rollenden Bewegung umkreist wird. Man konstruire nun das Trägheitsellipsoid für die Kegelspitze als festen Punkt. Mit dessen Hülfe findet man in schon oft benutzter Weise die Richtung des Dralls $\mathfrak{B}$, bezogen auf den festen Punkt. Das Moment $\mathfrak{K}$ der äusseren Kräfte ist ebenfalls bekannt; es ist das statische Moment des aus dem Gewichte und der senkrechten Componente des Auflagerdrucks bestehenden Kräftepaars. Beim Weiterrollen des Rades dreht sich mit ihm sowohl $\mathfrak{B}$ als $\mathfrak{K}$, die stets rechtwinklig zu einander bleiben. Die Grösse von $\mathfrak{K}$ ist nur von der Neigung der Radebene gegen den Fussboden, die absolute Grösse von $\mathfrak{B}$ aber zugleich von der Anfangsgeschwindigkeit abhängig. Wie gross aber diese Anfangsgeschwindigkeit sein muss, damit bei der gegebenen Neigung des Rades eine rein rollende Bewegung zu Stande kommen kann, folgt aus der Gleichung des Flächensatzes

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = \mathfrak{K}.$$

Auf die wirkliche Durchführung der Rechnung, die nach dem angegebenen Plane leicht erfolgen kann, gehe ich nicht ein. Dagegen mache ich noch ausdrücklich darauf aufmerksam, dass die rein rollende Bewegung nur bei einer ganz bestimmten Beziehung zwischen der Schiefstellung des Rades gegen die Vertikale und der Geschwindigkeit der Rollbewegung möglich ist. Wenn das Rad im Anfangszustande eine rein rollende Bewegung hatte und die genannte Bedingung nicht erfüllt war, kann sie sich nicht in dieser Weise fortsetzen; es tritt vielmehr alsbald noch eine „Fallbewegung" (nach unten oder auch nach oben hin) dazu. Dadurch wird die Neigung der Radebene gegen den Fussboden geändert und zwar in solchem Sinne, dass eine Annäherung an jene Radstellung stattfindet, für die bei der gegebenen Fahrgeschwindigkeit die Bedingung des reinen Rollens erfüllt ist.

Schliesslich möge noch bemerkt werden, dass man zu einer allgemeineren Theorie der Radbewegung dadurch gelangen kann, dass man zwar immer noch die „Wendebewegung" um die $\mathfrak{i}$-Axe ausschliesst, dagegen das Auftreten von Drehungen um die $\mathfrak{j}$- und die $\mathfrak{k}$-Axe zugleich zulässt. Diese würde sich dem allgemeinen Verhalten des Rades beim Rollen ziemlich genau anschliessen, da die als Wendebewegung bezeichnete Drehung um die $\mathfrak{i}$-Axe auf eine „bohrende" Reibung stösst und daher, wenn sie nicht schon anfänglich mit hinreichender Winkelgeschwindigkeit gegeben, also absichtlich herbeigeführt war, späterhin schnell erlischt und auch nicht von selbst wieder entstehen kann.

Sehr eng verwandt mit der vorigen ist auch die Bewegung einer Kugel auf einer rauhen horizontalen Ebene

(Billardball) bei beliebigen Anfangsbedingungen. Man hat diese Fälle schon ausführlich behandelt, ich gehe aber aus vielen gewichtigen Gründen nicht darauf ein, wovon ich auch den einen — aber nicht den ausschlaggebenden, da er sich bald beseitigen liesse — ganz offen eingestehen will, nämlich den, dass ich mich selbst mit diesem Probleme noch nicht eingehender beschäftigt habe.

§ 25a. Stösse am starren Körper.

Auf einen völlig freien starren Körper, der vorher in Ruhe war, möge ein Stoss einwirken, d. h. es soll während einer sehr kurzen Zeit an irgend einem Angriffspunkte eine Kraft $\mathfrak{P}$ angreifen, derart dass das Zeitintegral der Kraft $\int \mathfrak{P} dt$ über die ganze Stosszeit erstreckt von gegebener Richtung und Grösse ist. Ausser $\mathfrak{P}$ sollen während des Stossvorgangs keine äusseren Kräfte an dem Körper angreifen. Es handelt sich zunächst darum, die Bewegung anzugeben, die der Körper durch den Stoss erlangt.

Hierbei ist daran zu erinnern, dass das Bild des starren Körpers keineswegs ausreicht, um alle Fragen zu beantworten, die sich auf den Stoss beziehen. Je kleiner wir uns die Stosszeit vorstellen, desto grösser muss während ihr der durchschnittliche Werth des Stossdruckes $\mathfrak{P}$ angenommen werden, damit der Antrieb $\int \mathfrak{P} dt$ die vorgeschriebene Grösse erlange. Allzugross darf aber $\mathfrak{P}$ nicht werden, ohne Formänderungen von merklicher Grösse oder einen Bruch des Körpers herbeizuführen. Im ersten Bande wurde dies schon ausführlich besprochen. Hier soll aber einstweilen vorausgesetzt werden, dass die Stosszeit, wenn auch klein, so doch nicht so kurz bemessen sei, dass es nöthig würde, auf die durch den Stoss bewirkten Formänderungen einzugehen. Unter dieser ausdrücklichen Voraussetzung können wir an dem Bilde des starren Körpers bei der Lösung der aufgeworfenen Frage festhalten.

Die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_0$, die der Schwerpunkt S des gestossenen Körpers erlangt, lässt sich nach dem Satze von der