Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1901

§. 19. Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt ohne äussere Kräfte gegenüber der von mir gewählten Ausdrucksweise nur ein Unterschied im Wortlaute, der das Wesen der Sache ganz unberührt lässt.

Ich sagte vorher, dass mit $\mathfrak{B}$ auch die Bewegung, d. h. $\mathfrak{u}$ bekannt wäre. Bisher ist freilich erst eine Gl. (87) gegeben, die umgekehrt $\mathfrak{B}$ zu berechnen gestattet, wenn $\mathfrak{u}$ bekannt ist. Diese Gleichung müsste erst nach $\mathfrak{u}$ aufgelöst werden, um wirklich $\mathfrak{u}$ aus $\mathfrak{B}$ unmittelbar berechnen zu können. Die Auflösung von Gleichungen, in denen Vektoren auftreten, ist aber nicht so einfach, als die Auflösung der in der gewöhnlichen Algebra vorkommenden Gleichungen. Dass aber in der That $\mathfrak{u}$ gefunden werden kann, wenn $\mathfrak{B}$ gegeben ist, wird aus den weiteren Betrachtungen bald hervorgehen.

§ 19. Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt ohne äussere Kräfte.

Wir machen nach allen diesen Vorbereitungen jetzt den letzten und wichtigsten Schritt zur Untersuchung der Bewegungen, die ein vollständig sich selbst überlassener Körper mit gegebener Anfangsbewegung weiterhin ausführt. Hierin besteht wenigstens das Hauptziel, das wir uns in diesem Paragraphen stecken, wenn auch die Ueberschrift etwas anderes anzukündigen scheint. Um diese zu erklären, erinnere ich zunächst daran, dass wir bei dieser Untersuchung von einer etwaigen Translationsbewegung ganz absehen, uns den Schwerpunkt also von Anfang an und daher, beim Fehler äusserer Kräfte, auch dauernd in Ruhe denken wollten. Damit ist der Schwerpunkt schon von selbst ein „fester Punkt“ des Körpers. Es kann auch nichts ausmachen, wenn wir uns diesen ohnehin schon am Orte bleibenden Punkt überdies noch mit einem festen Gestelle verbunden denken, falls nur dem Körper dabei durch Anordnung eines Kugelgelenks die Möglichkeit erhalten bleibt, sich nach allen Richtungen hin ohne Widerstand zu drehen.

Dies allein würde allerdings noch nicht genügen, um die Einführung einer neuen Bezeichnung zu rechtfertigen, die ausdrücklich darauf hinweist, dass der Schwerpunkt in Ruhe bleibt. Es kommt aber hinzu, dass es für die wirkliche Ausführung der Untersuchung fast ganz gleichgültig ist, ob der Körper im Schwerpunkte oder in irgend einem andern Punkte festgehalten ist, um den er sich frei zu drehen vermag. Auch dieser Fall ist für viele Anwendungen der Mechanik von grossem Interesse und er muss daher ebenfalls behandelt werden. Da nun der Fall des frei beweglichen Körpers in ihm schon als Sonderfall mit enthalten ist, so thut man, um unnöthige Wiederholungen zu vermeiden, am besten, sogleich den allgemeineren Fall in Angriff zu nehmen. Es bleibt aber Jedem, der sich für diesen etwa nicht interessirt, unbenommen, sich unter dem festen Punkte, von dem weiterhin die Rede ist, überall den Schwerpunkt vorzustellen und hiernach von einer Lagerung im Gestelle ganz abzusehen.

Im allgemeineren Falle wird natürlich ein Zwang von dem Gestelle auf den bewegten Körper übertragen werden müssen, durch den der feste Punkt auch wirklich an seinem Orte festgehalten wird. Von Reibungen u. dgl. soll abgesehen werden und der Zwang kann daher nur in einer Auflagerkraft bestehen, die sich im festen Punkte überträgt. Diese Kraft ist die einzige äussere Kraft, die am bewegten Körper angreift. Sie kann keine Arbeit leisten, da ihr Angriffspunkt in Ruhe bleibt und wir schliessen daraus zunächst, dass die lebendige Kraft des Körpers constant sein muss. Ausserdem ist auch das statische Moment des Auflagerdrucks stets gleich Null, wenn wir den festen Punkt zum Momentenpunkte wählen. Hiernach folgt aus dem Flächensatze, dass auch der Drall $\mathfrak{B}$ — diesmal freilich nur für diese besondere Wahl des Momentenpunktes — nach Grösse und Richtung unverändert bleiben muss.

Wir betrachten nun das Strahlenbündel, das aus allen Graden besteht, die man vom festen Punkte aus nach allen möglichen Richtungen ziehen kann. Wir wollen uns dieses Strahlenbündel im Körper selbst festgelegt und mit ihm bewegt denken. Die Rotationsaxe wird zu verschiedenen Zeiten mit verschiedenen Strahlen dieses Bündels zusammenfallen.

Da wir einstweilen nicht wissen, mit welchen, so wollen wir zunächst alle Strahlen als mögliche spätere Lagen der Rotationsaxe in Aussicht nehmen. Dann lässt sich zunächst eine Aussage darüber machen, mit welcher Winkelgeschwindigkeit u sich der Körper bewegen muss, wenn grade irgend ein vorgegebener Strahl als Rotationsaxe dienen soll. Die lebendige Kraft L ist nämlich

$$L = \frac{1}{2} u^2 \Theta$$

und da L einen vom Anfangszustande abhängigen constanten Werth behält, folgt hieraus u aus dem zum betreffenden Strahle gehörigen Θ. Wir müssen hierzu freilich im Stande sein, den Werth des Trägheitsmoments Θ für alle Strahlen anzugeben. Im dritten Bande ist diese Frage für die Trägheitsmomente von Querschnittsflächen in Bezug auf alle Axen, die in der Ebene des Querschnitts liegen, gelöst worden. Damit kommen wir aber hier nicht aus und wir müssen daher jene früheren Betrachtungen entsprechend ergänzen.

Zu diesem Zwecke schreibe ich L noch in der Form

$$L = \frac{1}{2} \Sigma m (\mathrm{V}\mathfrak{u}\mathfrak{r})^2$$

an, was zulässig ist, da das Element der Summe unmittelbar die lebendige Kraft jedes einzelnen Massentheilchens angiebt. Von hier aus gehe ich zur Coordinatendarstellung über, indem ich

$$\mathrm{V}\mathfrak{u}\mathfrak{r} = \mathfrak{i}(u_2 z - u_3 y) + \mathfrak{j}(u_3 x - u_1 z) + \mathfrak{k}(u_1 y - u_2 x)$$

und daher

$$(\mathrm{V}\mathfrak{u}\mathfrak{r})^2 = (u_2 z - u_3 y)^2 + (u_3 x - u_1 z)^2 + (u_1 y - u_2 x)^2$$

setze. Man quadrire aus, setze den Werth in L ein und spalte L in ebensoviele Summen, als man beim Ausquadriren Glieder erhalten hatte. Dadurch erhält man für L

$$L = \frac{1}{2} u_2^2 \Sigma m z^2 - u_2 u_3 \Sigma m y z + \frac{1}{2} u_3^2 \Sigma m y^2 + \cdots, \qquad (94)$$

wobei ich mich damit begnügte, nur die drei ersten Glieder anzuschreiben. Die jetzt noch vorkommenden Summen, die sich (nebenbei bemerkt) so wie bei der früheren ähnlichen

Untersuchung auf Trägheits- und Centrifugalmomente in Bezug auf die Coordinatenaxen zurückführen lassen, sind jedenfalls constante Grössen, d. h. sie sind unabhängig von der besonderen Wahl des Strahls, die für die Drehaxe $\mathfrak{u}$ getroffen worden ist.

Denkt man sich nun auf jedem Strahle die Winkelgeschwindigkeit u abgetragen, mit der der Körper um diesen Strahl als Axe rotiren muss, damit die lebendige Kraft den constanten Werth L annimmt, so erhält man eine Fläche, die alle diese Punkte verbindet. Die Coordinaten eines Punktes der Fläche sind die Componenten von $\mathfrak{u}$, also $u_1\ u_2\ u_3$. Zwischen diesen Coordinaten besteht Gl. (94), in der alle übrigen Grössen constant sind. Hiernach ist Gl. (94) selbst die Gleichung der Fläche. Die Gleichung ist vom zweiten Grade und das Gleiche gilt daher auch von der ihr entsprechenden Fläche. Da sich ferner zu jedem Strahle des Strahlenbündels ein bestimmter endlicher Werth von u angeben lässt, so folgt, dass die Fläche den Schwerpunkt von allen Seiten her umschliesst und dass sie sich nicht ins Unendliche erstrecken kann. Hiermit ist die Fläche nach den Lehren der analytischen Geometrie als ein Ellipsoid gekennzeichnet.

Führt man an Stelle des Trägheitsmoments Θ den Trägheitsradius t ein, indem man $\Theta = Mt^2$ setzt, so kann L auch in der Form

$$L = \frac{1}{2} u^2 t^2 M$$

geschrieben werden und daraus folgt, dass für alle Strahlen das Produkt ut einen constanten Werth hat. Die Strecken u, die auf den Strahlen abgetragen wurden, und die wir inzwischen als Halbmesser eines Ellipsoids erkannt haben, sind demnach den zu diesen Strahlen gehörigen Trägheitshalbmessern umgekehrt proportional. Da man hiernach aus der Gestalt des Ellipsoids sofort auch einen Schluss auf die Trägheitsmomente ziehen kann, wird das Ellipsoid als das Trägheitsellipsoid bezeichnet. Diese Bezeichnung steht mit der von uns früher im dritten Bande eingeführten Bezeichnung „Trägheitsellipse“ in Uebereinstimmung.

Der Mittelpunkt des Ellipsoids fällt übrigens mit dem Schwerpunkte des Körpers (oder allgemeiner mit dem festen Punkte) zusammen, denn wenn man $\mathfrak{u}$ mit $-\mathfrak{u}$ vertauscht, so behält L seinen Werth und Gl. (94) bleibt immer noch erfüllt.

Ferner können wir jetzt auch schon einige Betrachtungen der vorausgehenden Paragraphen ergänzen. In § 17 war gezeigt worden, dass für die freien Axen die Bedingung $\delta\Theta = 0$ erfüllt sein muss. Diese trifft aber, wie wir jetzt erkennen, bei den drei Hauptaxen des Centralellipsoids und im Allgemeinen nur bei diesen zu. Hiernach hat jeder starre Körper mindestens drei aufeinander senkrecht stehende freie Axen. Mehr als drei und dann unendlich viele hat er nur, wenn das Trägheitsellipsoid in ein Umdrehungsellipsoid übergeht. Wird das Trägheitsellipsoid zu einer Kugel, so ist jede Schwerpunktsaxe eine freie Axe.

Auch die Untersuchung in § 18 kann jetzt weiter ausgeführt werden. Es handelte sich dort darum, die Bewegung anzugeben, die durch ein Kräftepaar $\mathfrak{K}$ hervorgebracht wird und diese Frage war bisher nur für den Fall beantwortet worden, dass $\mathfrak{K}$ in die Richtung der freien Axe fällt. Um sie für den allgemeineren Fall zu lösen, denke man sich $\mathfrak{K}$ in drei Componenten $K_1 K_2 K_3$ längs der drei Hauptaxen des (für den Schwerpunkt construirten) Centralellipsoids zerlegt. Für die erste Componente folgt dann, da sie mit einer freien Axe zusammenfällt, nach Gl. (93)

$$\Theta_1 \frac{du_1}{dt} = K_1$$

und entsprechend für die übrigen. Die wirkliche Winkelbeschleunigung erhalten wir dann nach dem Satze über die Zusammensetzung unendlich kleiner Drehungen durch geometrische Summirung der drei Componenten. Wenn wir also jetzt unter $\mathfrak{i}\,\mathfrak{j}\,\mathfrak{k}$ drei Einheitsvektoren verstehen, die in den Richtungen der drei Hauptaxen gezogen sind, finden wir

$$\frac{d\mathfrak{u}}{dt} = \mathfrak{i}\frac{K_1}{\Theta_1} + \mathfrak{j}\frac{K_2}{\Theta_2} + \mathfrak{k}\frac{K_3}{\Theta_3}, \tag{95}$$

oder auch durch Integration nach der Zeit

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{i}\,\frac{\int K_1\,dt}{\Theta_1} + \mathfrak{j}\,\frac{\int K_2\,dt}{\Theta_2} + \mathfrak{k}\,\frac{\int K_3\,dt}{\Theta_3}. \tag{96}$$

Berücksichtigen wir ferner noch Gl. (92), so lässt sich dafür auch schreiben

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{i}\,\frac{B_1}{\Theta_1} + \mathfrak{j}\,\frac{B_2}{\Theta_2} + \mathfrak{k}\,\frac{B_3}{\Theta_3} \tag{97}$$

und diese Gleichung gestattet, zu jedem gegebenen $\mathfrak{B}$ das zugehörige $\mathfrak{u}$ zu berechnen, d. h. sie bildet die am Schlusse von § 18 noch vermisste Auflösung der Gl. (87) nach $\mathfrak{u}$. Freilich setzt ihre Benutzung voraus, dass die Axenrichtungen des Centralellipsoids und die ihnen zugehörigen Hauptträgheitsmomente Θ_1 Θ_2 Θ_3 bereits ermittelt sind.

Auf Grund der vorausgehenden Betrachtungen lässt sich übrigens noch ein Ausdruck für die lebendige Kraft eines um eine Schwerpunktsaxe rotirenden starren Körpers angeben, der in manchen Fällen mit Vortheil gebraucht werden kann. Versteht man nämlich unter u_1 u_2 u_3 wiederum die Projektionen der Winkelgeschwindigkeit auf die Hauptträgheitsaxen, so besteht zwischen ihnen, indem man sie als Coordinaten eines Punktes auf dem Trägheitsellipsoid auffasst, die Gleichung

$$1 = \frac{u_1^2}{a^2} + \frac{u_2^2}{b^2} + \frac{u_3^2}{c^2}.$$

Hierbei sind, wie man schon aus dem Zusammenhange erkennt, die Halbaxen des Ellipsoids vorübergehend mit a b c bezeichnet. Multiplicirt man die Gleichung mit L und beachtet, dass auch

$$L = \frac{1}{2}\,\Theta_1 a^2 = \frac{1}{2}\,\Theta_2 b^2 = \frac{1}{2}\,\Theta_3 c^2$$

ist, so folgt, wenn diese Werthe auf der rechten Seite der Gleichung eingesetzt werden, für die lebendige Kraft L auch

$$L = \frac{1}{2}\,\Theta_1 u_1^2 + \frac{1}{2}\,\Theta_2 u_2^2 + \frac{1}{2}\,\Theta_3 u_3^2. \tag{97a}$$

Bisher benutzte ich nur die Bedingung, dass die lebendige Kraft des um den festen Punkt (oder um den Schwerpunkt) rotirenden Körpers constant bleiben muss. Jetzt wende ich mich zu den Folgerungen, die aus dem Flächensatze, also aus der Constanz von $\mathfrak{B}$, gezogen werden können.

Bildet man das innere Produkt aus $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{u}$, so erhält man

$$\mathfrak{B}\mathfrak{u} = B'u = u^2\Theta = 2L,$$

wobei wieder, wie schon in § 17, mit B' die Projektion von $\mathfrak{B}$ auf die Richtung der augenblicklichen Drehaxe bezeichnet ist. Zugleich ist der damals in Gl. (90) für B' berechnete Werth eingesetzt und schliesslich für $u^2\Theta$ der doppelte Werth der lebendigen Kraft L eingeführt worden. Da L constant ist, hat demnach auch das Produkt $\mathfrak{B}\mathfrak{u}$ einen constanten Werth. Die Faktoren B' und u sind freilich mit der Zeit veränderlich. Wir können aber das innere Produkt $\mathfrak{B}\mathfrak{u}$ auch dadurch in zwei richtungslose Faktoren zerlegen, dass wir umgekehrt $\mathfrak{u}$ auf $\mathfrak{B}$ projiciren und

$$\mathfrak{B}\mathfrak{u} = Bu' = 2L$$

setzen, woraus

$$u' = \frac{2L}{B} \tag{98}$$

folgt. Da nun L und B constant sind, folgt, dass auch die Projektion u' von $\mathfrak{u}$ auf die unveränderliche Richtung von $\mathfrak{B}$ constant bleiben muss.

Diese Bemerkung gestattet uns jetzt schon, einen besseren Ueberblick über die fernere Bewegung des Körpers bei gegebenem Anfangszustande zu gewinnen. Man denke sich in der Anfangslage des Körpers das Trägheitsellipsoid für den festen Punkt oder bei einem freien Körper das Centralellipsoid (Trägheitsellipsoid für den Schwerpunkt) construirt. Dann trage man die Richtung der Anfangswinkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}_0$ ein und ermittle die zugehörige Richtung von $\mathfrak{B}$, was man sich vorläufig etwa nach Gl. (87) ausgeführt denken kann. Der Endpunkt von $\mathfrak{u}_0$ liegt auf dem Ellipsoid. Man ziehe durch ihn eine Ebene α senkrecht zu $\mathfrak{B}$; diese Ebene ist nach der schon in § 13 eingeführten Bezeichnung eine unveränderliche Ebene unseres Problems. Sie schneidet auf der Richtungslinie von $\mathfrak{B}$ eine vom festen Punkte aus gerechnete Strecke ab, die in dem für das Auftragen der Winkelgeschwindigkeiten gewählten Maassstabe die Projektion u_0' angiebt. Da aber u' constant ist, bildet diese Strecke zugleich auch in jedem ferneren Augenblicke das Maass für die Projektion der Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ auf die unveränderliche Richtung von $\mathfrak{B}$.

Wenn sich der Körper weiterhin bewegt, dreht sich mit ihm auch das Trägheitsellipsoid, das wir uns fest mit ihm verbunden denken müssen, in andere Lagen. Unveränderlich bleibt nur die Richtung und Grösse von $\mathfrak{B}$, die Ebene α und die Projektion u'. Wie nun aber auch später Richtung und Grösse von $\mathfrak{u}$ sich geändert haben mögen, jedenfalls ist $\mathfrak{u}$ irgend ein Halbmesser des Ellipsoids und der unveränderliche Werth von u' ist die Projektion dieses Halbmessers auf die Richtung von $\mathfrak{B}$. Daraus folgt, dass auf jeden Fall der Endpunkt des Halbmessers $\mathfrak{u}$ in der Ebene α bleiben muss. In Abb. 21 ist dies angedeutet. Das Ellipsoid ist in irgend einer seiner Stellungen gezeichnet, O ist der feste Punkt, α die zur festen Richtung von $\mathfrak{B}$ senkrecht gezogene Ebene, die auf $\mathfrak{B}$ die Strecke u' abschneidet und $\mathfrak{u}$ ist die durch die augenblickliche Stellung des Ellipsoids und durch $\mathfrak{B}$ schon mit bestimmte augenblickliche Winkelgeschwindigkeit. Dann muss der Endpunkt von $\mathfrak{u}$ in der Ebene α enthalten sein. Die Umrisse des Körpers sind ganz gleichgültig und daher in der Zeichnung weggelassen; für die Beurtheilung der Bewegung, die der Körper weiterhin ausführt, genügt schon vollständig die Kenntniss des Trägheitsellipsoids. Körper mit identischem Trägheitsellipsoid bewegen sich auf gleiche Art.

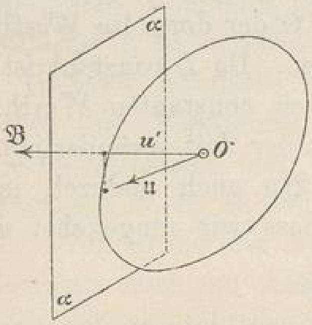

Abb. 21.

Zwischen $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{B}$ besteht aber noch eine wichtige Beziehung, die freilich in den früher zwischen beiden Grössen aufgestellten Gleichungen schon mit enthalten ist, die aber nun noch ihre geometrische Deutung finden muss. Die Richtung von $\mathfrak{B}$ steht nämlich senkrecht auf einer durch den Endpunkt von $\mathfrak{u}$ gelegten Tangentialebene oder mit anderen Worten:

die bereits gezogene Ebene α berührt das Ellipsoid im Endpunkte von $\mathfrak{u}$. Ehe ich dies beweise, bemerke ich noch, dass hiermit ein sehr bequemer Weg zur Construction der Richtung von $\mathfrak{B}$ bei bekanntem $\mathfrak{u}$ oder umgekehrt gegeben ist, der die unmittelbare Berechnung nach den Gl. (87) oder (97) meist entbehrlich macht. In Anknüpfung an bekannte Untersuchungen der analytischen Geometrie kann man auch sagen, dass $\mathfrak{B}$ stets senkrecht zu jener Durchmesserebene steht, die dem Durchmesser $\mathfrak{u}$ conjugirt ist.

Der Beweis für die aufgestellte Behauptung gestaltet sich sehr einfach. Man denke sich vom Endpunkte von $\mathfrak{u}$ in beliebiger Richtung auf dem Ellipsoide einen unendlich kleinen Bogen gezogen, der unter Beachtung der Richtung mit $\delta\mathfrak{u}$ bezeichnet sei. Diese Bezeichnung rechtfertigt sich damit, dass die geometrische Summe $\mathfrak{u} + \delta\mathfrak{u}$ ebenfalls wieder ein Halbmesser des Ellipsoids ist und dass früher alle Halbmesser unter der gemeinsamen Bezeichnung $\mathfrak{u}$ zusammengefasst wurden. Man muss nur im Auge behalten, dass dieses $\delta\mathfrak{u}$ eine beliebige auf der Oberfläche des Ellipsoids enthaltene kleine Strecke ist und nicht mit der Aenderung $d\mathfrak{u}$ verwechselt werden darf, die $\mathfrak{u}$ in Wirklichkeit im Zeitelemente dt erfährt. Vielmehr hat $\delta\mathfrak{u}$ mit dem Bewegungsvorgange gar nichts zu thun; wir wollen mit seiner Hülfe nur die rein geometrischen Eigenschaften des im Ruhezustande gedachten Ellipsoids ermitteln.

Es wird sich jetzt nur darum handeln, zu beweisen, dass alle $\delta\mathfrak{u}$, die man ziehen möge, und die alle in der Tangentialebene an das Ellipsoid enthalten sind, senkrecht zu $\mathfrak{B}$ stehen, denn dann steht auch die Tangentialebene selbst senkrecht zu $\mathfrak{B}$. Wenn zwei Strecken senkrecht zu einander stehen sollen, muss aber ihr inneres Produkt verschwinden. Ich bilde also das innere Produkt $\mathfrak{B}\delta\mathfrak{u}$; dabei setze ich den Werth von $\mathfrak{B}$ aus Gl. (87) ein und erhalte

$$\mathfrak{B}\delta\mathfrak{u} = \delta\mathfrak{u}\,\{\,\mathfrak{u}\cdot\Sigma m\mathfrak{r}^2 - \Sigma m\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{u}\mathfrak{r}\,\}.$$

Die rechte Seite bildet aber ein vollständiges Differential. Man hat nämlich

$$\frac{1}{2}\,\delta\{\mathfrak{u}^2\cdot\Sigma m\mathfrak{r}^2 - \Sigma m(\mathfrak{u}\mathfrak{r})^2\} = \delta\mathfrak{u}\{\mathfrak{u}\cdot\Sigma m\mathfrak{r}^2 - \Sigma m\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{u}\mathfrak{r}\},$$

wobei nur zu beachten ist, dass $\Sigma m\mathfrak{r}^2$ unabhängig von dem speciell gewählten Halbmesser $\mathfrak{u}$ des Trägheitsellipsoids ist; ebenso auch der nach irgend einem Massentheilchen m gezogene Radiusvektor $\mathfrak{r}$.

Nun war

$$\Theta = \Sigma m\mathfrak{r}^2 - \Sigma m(\mathfrak{u}_1\mathfrak{r})^2$$

(vgl. § 17), daher auch

$$\frac{1}{2}\{\mathfrak{u}^2\cdot\Sigma m\mathfrak{r}^2 - \Sigma m(\mathfrak{u}\mathfrak{r})^2\} = \frac{1}{2}u^2\Theta = L.$$

Wir gelangen damit zu dem einfachen Resultate

$$\mathfrak{B}\,\delta\mathfrak{u} = \delta L.$$

Das Ellipsoid war aber grade auf Grund der Bedingung construirt, dass man für jeden Halbmesser $\mathfrak{u}$, der zu ihm gehört, denselben Werth der lebendigen Kraft L erhält. Wenn also die Strecke $\delta\mathfrak{u}$ auf dem Ellipsoide enthalten sein soll, so kann dadurch, dass wir den Endpunkt von $\mathfrak{u}$ um $\delta\mathfrak{u}$ verschieben, keine Aenderung δL bewirkt werden. Man kann geradezu die Gleichung

$$\delta L = 0$$

als die aus der endlichen Gleichung $L =$ Const. hervorgegangene Differentialgleichung des Ellipsoids bezeichnen.

Demnach ist für alle $\delta\mathfrak{u}$, die hier in Frage kommen können,

$$\mathfrak{B}\,\delta\mathfrak{u} = 0$$

und hieraus folgt, dass $\mathfrak{B}$ senkrecht auf allen diesen $\delta\mathfrak{u}$, also auch senkrecht zur Tangentialebene an das Ellipsoid im Endpunkte von $\mathfrak{u}$ steht. Alle vorher hierüber aufgestellten Behauptungen sind damit bewiesen.

Kehren wir nun zur Betrachtung von Abb. 21 zurück. Wir hatten schon vorher erkannt, dass in jeder Lage des Körpers und mit ihm des Ellipsoids der die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit darstellende Halbmesser $\mathfrak{u}$ mit seinem Endpunkte in der unveränderlichen Ebene α liegen muss. Jetzt wissen wir auch, dass das Ellipsoid in diesem Endpunkte von der Ebene α berührt wird. Demnach können nur solche Halbmesser des Ellipsoids im Laufe der Bewegung die Winkelgeschwindigkeit **u** angeben, deren Endpunkte durch Drehungen des Ellipsoids zu Berührungspunkten der Ebene α werden können.

Man denke sich das ganze Ellipsoid durch ein Bündel von Tangentialebenen eingehüllt. Unter allen diesen Tangentialebenen suche man jene auf, deren Abstand vom festen Punkte gleich u' ist. Die zugehörigen Berührungspunkte werden einen oder auch zwei getrennte, in sich geschlossene Curvenzüge bilden. Alle Punkte dieser Curven können durch geeignete Drehung des Ellipsoids in die Ebene α übergeführt werden, so dass sie die Berührungspunkte zwischen α und dem Ellipsoide bilden.

Hiermit ist nun auch entschieden, welche durch O gehenden Strahlen nach und nach als Drehaxen dienen werden: es sind die Verbindungslinien von O nach den Punkten der vorher construirten Curve. Poinsot, von dem die hier auseinandergesetzte geometrische Lösung des Problems herrührt, hat die Curve als die Polodie (oder den Polweg) bezeichnet. Er hat ferner noch eine zweite Curve zur Beschreibung des ganzen Vorgangs benützt. Auch in der Ebene α wird nämlich der Berührungspunkt mit dem Ellipsoid, der in jedem Augenblicke als der Pol der Bewegung bezeichnet werden kann, nach und nach andere Lagen einnehmen. Ber Berührungspunkt beschreibt dabei eine Curve, die als die Herpolodie bezeichnet wird. Die Bewegung des Ellipsoids kann nun als ein Rollen der Polodie auf der Herpolodie aufgefasst werden.

Diese einfache geometrische Beschreibung der im Uebrigen so schwierig zu behandelnden Bewegung genügt meist, um sich ohne Rechnung einen schnellen Ueberblick über die Erscheinungen zu verschaffen, die man zu erwarten hat. Damit ist aber grade dem Techniker am meisten gedient. Von der Gestalt des Trägheitsellipsoids des Körpers wird er sich im gegebenen Falle meist sehr schnell eine ziemlich genau zutreffende Vorstellung machen können, ohne vorher viel rechnen zu müssen. Wie die Polodie aussieht, lässt sich dann auf Grund ihrer geometrischen Eigenschaften ebenfalls schnell genug erkennen. Die Herpolodie ist nicht so leicht anzugeben; aber man braucht sie auch kaum, um sich eine deutliche Vorstellung von dem Rollen des Ellipsoids auf der unveränderlichen Ebene zu machen. — Der Hauptmangel der vorausgehenden Betrachtungen besteht nur noch darin, dass die Zeit, die während der Bewegung des Körpers aus der Anfangslage in irgend eine andere verstreicht, daraus nicht unmittelbar entnommen werden kann. — Darauf werde ich in § 21 zurückkommen.

§ 20. Die stabilen Drehaxen.

Wir können sofort eine wichtige Anwendung der vorhergehenden Lehren machen. Früher fanden wir nämlich, dass jeder Körper mindestens drei freie Axen hat, die mit den Hauptträgheitsaxen zusammenfallen. Sie sind aber, wie sich jetzt zeigen wird, nicht alle „stabile“ Drehaxen.

Der Begriff der „Stabilität“ ist aus der Lehre vom Gleichgewichte entnommen. Er ist dort ein ganz eindeutig bestimmter Begriff; wenn er aber auf Bewegungen übertragen werden soll, bedarf er in jedem einzelnen Falle einer neuen Definition. Was man unter Stabilität einer Bewegung verstehen soll, ist nämlich in vielen Fällen einstweilen noch ganz streitig, so dass verschiedene Autoren zuweilen ganz verschiedene Begriffe mit demselben Worte verbinden. Ich werde daher zunächst erklären, was man unter der Stabilität einer Drehaxe versteht, ohne mich aber darauf einzulassen, eine Definition für die Stabilität einer Bewegung überhaupt geben zu wollen.

Man denke sich, dass ein Körper nicht genau, sondern nur nahezu um eine freie Axe rotire. Würde er genau um die freie Axe rotiren, so könnte sich die Drehaxe niemals ändern und der Körper würde nach jeder Umdrehung immer wieder in die Anfangslage zurückkehren. Völlig genau lässt sich dieser Zustand aber niemals erreichen und es fragt sich, welche Folgen eine geringe Abweichung davon nach sich zieht. Wenn