Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1901

§. 16. Die freien Axen

urn:nbn:de:hbz:466:1-84695

darum, zu zeigen, auf wie einfache Art man mit Hülfe des Flächensatzes zur ersten Hauptgleichung gelangen kann, die sonst auf viel umständlicherem Wege abgeleitet wird.

§ 16. Die freien Axen.

Ein starrer Körper möge anfänglich eine beliebige Bewegung besitzen und hierauf ohne Einwirkung äusserer Kräfte sich selbst überlassen werden. Wir schliessen nach Schwerpunkts- und Flächensatz von Neuem, dass sowohl die Bewegungsgrösse des ganzen Körpers als auch der Drall constant bleiben müssen. In jedem Augenblicke kann man sich die Bewegung in eine Translation zerlegt denken mit jener Geschwindigkeit, die dem Schwerpunkte zukommt und in eine Rotation um eine durch den Schwerpunkt gehende Axe. Die Translation geht nach dem Schwerpunktssatze gleichförmig vor sich und interessirt uns kaum. Viel wichtiger ist jetzt für uns die Frage nach der Rotationsbewegung. Wir wollen daher von der Translation ganz absehen, also annehmen, dass der Schwerpunkt des starren Körpers schon von Anfang an ruhte; beim Fehlen aller äusseren Kräfte wird er dann auch dauernd in Ruhe bleiben, so dass wir es in der That nur noch mit den Rotationen zu thun haben. Im Uebrigen muss aber betont werden, dass auch im allgemeineren Falle das, was jetzt von den Rotationsbewegungen für sich ausgesagt werden soll, unverändert gültig bleibt, und dass dann nur noch die von den Rotationen unabhängige und hier gleichgültige constante Translationsbewegung hinzutritt.

Wir werden das wichtige Problem, die Bewegung eines sich selbst überlassenen starren Körpers anzugeben, nur schrittweise in Angriff nehmen. Hier beschränken wir uns auf die Beantwortung der Frage, ob die Rotationsaxe ihre Richtung im Raume und im Körper dauernd beibehält oder nicht.

Wer sich diese Frage zum ersten Male vorlegt, ohne vorher davon gehört zu haben, wird leicht geneigt sein, die Constanz der Rotationsaxe für alle Fälle von vornherein anzunehmen. Schon die oft nicht ganz stichhaltige Fassung des

Trägheitsgesetzes, wonach ein Körper seine augenblickliche Bewegung beim Fehlen äusserer Kräfte unverändert beibehalten müsse, verleitet oft zu dieser gleichwohl irrigen Annahme. Im Allgemeinen verändert sich vielmehr die Lage der Rotationsaxe mit der Zeit sowohl relativ zum Körper als zum absoluten Raume. Sie kann freilich auch constant bleiben und jede im Körper gezogene (und jedenfalls durch den Schwerpunkt gehende) Axe, um die sich der Körper ohne Zwang dauernd zu drehen vermag, heisst eine freie Axe (oder auch permanente Drehaxe).

Auf Grund des Trägheitsgesetzes vermag man nur zu schliessen, dass ein einzelner materieller Punkt die Bewegung, die er hatte, ohne Einwirkung äusserer Kräfte beibehält oder dass das Gleiche auch von der Schwerpunktsbewegung eines beliebigen Punkthaufens gilt. Die Rotationsbewegung wird aber von der Aussage des Trägheitsgesetzes nicht unmittelbar berührt und mittelbar nur insofern, als aus dem Trägheitsgesetze in der Dynamik des materiellen Punktes eine Reihe von Folgerungen gezogen wurde, die sich später auf die Dynamik des Punkthaufens übertragen liessen und die daher jetzt an Stelle des Trägheitsgesetzes zur Untersuchung der Rotationserscheinungen verwendet werden können.

Man wird aber nicht leicht die Forderung fallen lassen, dass sich irgend eine mit der Rotationsbewegung zusammenhängende Grösse beim Fehlen äusserer Kräfte als constant erweisen müsse, schon desshalb, weil man stets gewohnt ist, die Kräfte als Ursachen von Veränderungen anzusehen. In der That kann man zwei sehr wichtige Grössen angeben, die nur durch das Eingreifen äusserer Kräfte geändert werden können. Die erste ist die lebendige Kraft des starren Körpers, von der dies schon im ersten Bande dieses Werkes gezeigt wurde und die andere ist der Drall, der nach dem Flächensatze (vgl. § 13 unter b)) der Zeit nach constant und hier überdies noch für jeden Momentenpunkt gleich gross ist. Die zweite Bedingung sagt übrigens mehr aus, als die erste, denn die lebendige Kraft ist eine Grösse ohne Richtung und die

Bedingung, dass sie constant sei, wird daher durch eine einzige Beziehung zwischen Zahlengrössen ausgesprochen. Der Drall ist dagegen eine gerichtete Grösse und die Bedingung, dass er sich nicht ändere, schliesst neben der Constanz des Absolutwerthes auch die Constanz der Richtung ein. Die Vektorgleichung, die dies ausspricht, lässt sich in drei von einander unabhängige Componentengleichungen zerlegen, enthält also drei Zahlenbeziehungen. In der That ist daher auch das Moment der Bewegungsgrösse von noch grösserer Bedeutung für die Beurtheilung der Rotationserscheinungen, als selbst die lebendige Kraft.

Der allgemeine Ausdruck für den Drall war nach § 13

$$\mathfrak{B} = \Sigma V m \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{r}.$$

Hiermit ist aber nur eine allgemeine Anweisung dafür gegeben, wie man $\mathfrak{B}$ finden kann, wenn die Geschwindigkeiten und Lagen der einzelnen Massen m bekannt sind. Die wirkliche Ausrechnung ist erst noch vorzunehmen und zwar hier unter der Voraussetzung, dass der Punkthaufen ein starrer Körper ist.

Im gegebenen Augenblicke sei die Winkelgeschwindigkeit des starren Körpers gleich $\mathfrak{u}$. Hiermit ist die Richtung der durch den Schwerpunkt gehenden augenblicklichen Rotationsaxe, der Sinn der Drehung und zugleich der Absolutwerth u der Winkelgeschwindigkeit angegeben, d. h. man kennt mit $\mathfrak{u}$ überhaupt den augenblicklichen Bewegungszustand vollständig. Hiernach muss sich $\mathfrak{B}$ als Function von $\mathfrak{u}$ darstellen lassen. — Der nach einem Massentheilchen m vom Schwerpunkte S aus (Abb. 19) gezogene Radiusvektor sei mit $\mathfrak{r}$ bezeichnet; dann ist die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ von m

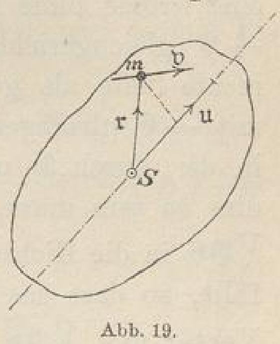

Abb. 19.

$$\mathfrak{v} = -V \mathfrak{u} \mathfrak{r}$$

(vgl. Bd. I, Gl. 56, wobei nur zu beachten ist, dass der dort mit $\mathfrak{r}'$ bezeichnete Vektor hier $\mathfrak{r}$ geschrieben ist). Setzt man diesen Werth ein, so wird

$$\mathfrak{B} = -\Sigma V(mV\mathfrak{u}\mathfrak{r})\cdot\mathfrak{r}$$

oder nach Vertauschung der Reihenfolge der Faktoren im äusseren Produkte

$$\mathfrak{B} = \Sigma m V\mathfrak{r}\cdot V\mathfrak{u}\mathfrak{r}. \tag{85}$$

Man muss also zunächst das äussere Produkt aus $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{r}$ bilden, dann dieses selbst wieder als zweiten Faktor eines äussern Produkts ansehen, dessen erster Faktor $\mathfrak{r}$ ist, um hierauf nach Multiplikation mit m und Summirung über den ganzen Haufen $\mathfrak{B}$ zu erhalten. Die zweimal aufeinanderfolgende Vorschrift zur Bildung des äusseren Produkts ist in diesem Buche bisher nicht vorgekommen. Ganz allgemein gilt dafür eine sehr einfache Rechenvorschrift, die durch die Formel

$$V\mathfrak{A}\cdot V\mathfrak{B}\mathfrak{C} = \mathfrak{B}\cdot\mathfrak{A}\mathfrak{C} - \mathfrak{C}\cdot\mathfrak{A}\mathfrak{B} \tag{86}$$

zum Ausdrucke gebracht werden kann, in der $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ beliebige Vektoren sind. Die rechte Seite dieser Gleichung besteht aus zwei Gliederu, von denen das erste den Vektor $\mathfrak{B}$ als Faktor enthält und daher mit ihm gleichgerichtet ist; denn der andere Faktor $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ ist ein inneres Produkt aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ und daher eine Grösse ohne Richtung. Das zweite Glied ist ebenso mit $-\mathfrak{C}$ gleichgerichtet. Hieraus geht schon hervor, dass die rechte Seite als geometrische Summe eines mit $\mathfrak{B}$ und eines mit $-\mathfrak{C}$ gleichgerichteten Vektors eine Richtung besitzt, die in der durch $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ gelegten Ebene enthalten ist. Dass dies so sein muss, folgt aber andererseits sofort daraus, dass $V\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ in die Richtung der Normalen der Ebene durch $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ fällt, so dass das äussere Produkt aus irgend einem anderen Vektor und $V\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ senkrecht zu jener Normalen stehen und daher wieder in die Ebene durch $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ fallen muss.

Wenn in dem elementaren mathematischen Unterrichte auf den Mittelschulen die Anfangsgründe des Rechnens mit gerichteten Grössen gelehrt würden, was an und für sich leicht durchführbar und sehr zu wünschen wäre, könnte ich mich auf Gl. (86) als auf eine der bekanntesten Formeln der Vektoralgebra berufen. Da dies heutzutage leider noch nicht zutrifft, bleibt mir nichts übrig, als hier den Beweis jenes algebraischen Satzes selbst vorzuführen. Am einfachsten gestaltet sich dieser, wenn man sich dabei auf die Darstellung der Vektoren mit Hülfe rechtwinkliger Componenten in den Richtungen der Einheitsvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ stützt (Bd. I, § 16 u. § 17). Nach Gl. 51, Bd. I, ist

$$V\mathfrak{B}\mathfrak{C} = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

$$= \mathfrak{i}(B_2 C_3 - B_3 C_2) + \mathfrak{j}(B_3 C_1 - B_1 C_3) + \mathfrak{k}(B_1 C_2 - B_2 C_1)$$

und hiernach auch

$$V\mathfrak{A}V\mathfrak{B}\mathfrak{C} = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ (B_2 C_3 - B_3 C_2) & (B_3 C_1 - B_1 C_3) & (B_1 C_2 - B_2 C_1) \end{vmatrix}.$$

Entwickelt man die Determinante, so erhält man zunächst für die $\mathfrak{i}$-Componente

$$\mathfrak{i}(A_2 B_1 C_2 - A_2 B_2 C_1 - A_3 B_3 C_1 + A_3 B_1 C_3)$$

oder wenn man $A_1 B_1 C_1$ einmal als positives und einmal als negatives Glied zufügt,

$$\mathfrak{i}\{B_1(A_1 C_1 + A_2 C_2 + A_3 C_3) - C_1(A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3)\},$$

d. h. wenn man sich der Bedeutung der in den runden Klammern stehenden Summen erinnert

$$\mathfrak{i}\{B_1 \cdot \mathfrak{A}\mathfrak{C} - C_1 \cdot \mathfrak{A}\mathfrak{B}\}.$$

Genau ebenso findet man für die $\mathfrak{j}$-Componente

$$\mathfrak{j}\{B_2 \cdot \mathfrak{A}\mathfrak{C} - C_2 \cdot \mathfrak{A}\mathfrak{B}\}$$

und ähnlich für die letzte Componente. Fasst man aber alle drei Componenten wieder zusammen, so erhält man nach Herausheben der gemeinsamen Faktoren

$$\mathfrak{A}\mathfrak{C} \cdot (\mathfrak{i}B_1 + \mathfrak{j}B_2 + \mathfrak{k}B_3) - \mathfrak{A}\mathfrak{B} \cdot (\mathfrak{i}C_1 + \mathfrak{j}C_2 + \mathfrak{k}C_3),$$

d. h. genau den in Gl. (86), die hiermit bewiesen ist, angegebenen Werth.

Nach dieser Abschweifung in das Gebiet der Algebra kehre ich zu dem Werthe von $\mathfrak{B}$ in Gl. (85) zurück. Die Anwendung des Satzes der Gl. (86) liefert

$$\mathfrak{B} = \Sigma m (\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{r}^2 - \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{u}\mathfrak{r})$$

oder nach Spaltung des Ausdrucks in zwei Glieder

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{u} \cdot \Sigma m \mathfrak{r}^2 - \Sigma m \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{u}\mathfrak{r}. \tag{87}$$

Das erste der beiden Glieder, aus denen $\mathfrak{B}$ besteht, ist gleichgerichtet mit der Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$, denn es enthält nicht nur $\mathfrak{u}$ als Faktor, sondern der andere richtungslose Faktor $\Sigma m \mathfrak{r}^2$ ist auch unter allen Umständen positiv. Von dem anderen Gliede lässt sich aber ohne nähere Kenntniss der Gestalt des Körpers nicht voraussehen, welche Richtung es annehmen wird. Im Allgemeinen ist daher $\mathfrak{B}$ nicht mit $\mathfrak{u}$ gleichgerichtet; dies trifft vielmehr nur unter der Bedingung zu, dass auch

$$\Sigma m \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{u}\mathfrak{r} \parallel \mathfrak{u}$$

ist oder auch ganz verschwindet.

Wir werden sofort sehen, von welcher Wichtigkeit die Entscheidung ist, ob $\mathfrak{B}$ parallel zu $\mathfrak{u}$ geht oder nicht. Man betrachte Abb. 20, in der $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{B}$ verschieden gerichtet eingetragen sind, und zwar so, wie sie bei der angegebenen Körpergestalt ungefähr wirklich zu einander liegen würden.

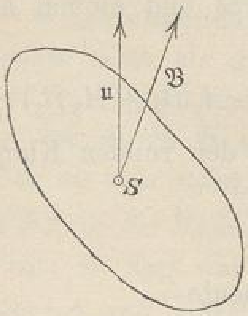

Abb. 20.

Wenn man den Körper mit Hülfe von Zapfen in einem Gestelle lagerte, könnte man ihn natürlich leicht zwingen, die Bewegung um die anfängliche Drehaxe mit constanter Winkelgeschwindigkeit dauernd beizubehalten. Hätte sich dann der Körper in eine zweite Lage gedreht, so müsste sich $\mathfrak{B}$ mit ihm gedreht haben. Die Radienvektoren $\mathfrak{r}$ nach den einzelnen Massentheilchen haben sich nämlich alle um den gleichen Winkel gedreht, während $\mathfrak{u}$ constant blieb. Nach der Zusammensetzung des

Ausdruckes von $\mathfrak{B}$ in Gl. (87) folgt daher, dass wir den Werth von $\mathfrak{B}$ in der neuen Lage sofort dadurch erhalten, dass wir mit dem in der ersten Lage berechneten Werthe ebenfalls eine Drehung um denselben Winkel vornehmen. Mit anderen Worten: $\mathfrak{B}$ ist, solange $\mathfrak{u}$ constant bleibt, relativ zum Körper constant; dagegen dreht es sich mit dem Körper zusammen im festen Raume herum, beschreibt also eine Kegelfläche, deren Axe $\mathfrak{u}$ ist.

Nach dem Flächensatze, Gl. (82a), ist aber

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = \Sigma V \mathfrak{P} \mathfrak{r} \tag{88}$$

und hiernach müssen äussere Kräfte $\mathfrak{P}$ einwirken, um irgend eine Aenderung von $\mathfrak{B}$, wenn diese auch nur in der Richtung und nicht in dem absoluten Werthe besteht, hervorzubringen. Wir erkennen daraus, dass $\mathfrak{u}$ in Abb. 20 unmöglich eine freie Axe sein kann; vielmehr muss ein in einem Kräftepaare bestehender Zwang auf die Axe von den festen Lagern übertragen werden, um die Umdrehung um diese Axe dauernd aufrecht zu erhalten. Das Moment des hierzu erforderlichen resultirenden Kräftepaares der Zapfendrücke $\Sigma V \mathfrak{P} \mathfrak{r}$ kann nach Gl. (88) bei gegebenem $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{B}$ sofort leicht berechnet werden. Man erkennt daraus auch, dass die Ebene des den äusseren Zwang darstellenden Kräftepaares selbst mit dem Körper herumrotirt und dass dies daher auch von den in den Lagern übertragenen Zapfendrücken gilt. Dadurch wird das aus der Erfahrung wohlbekannte Rütteln in den Lagern hervorgebracht, das bei der Rotation eines Körpers um eine aufgezwungene Axe entsteht.

Als Bedingung für eine freie Axe erkennen wir hiernach, dass $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{u}$ gleich gerichtet sein muss, oder dass, was auf dasselbe hinauskommt,

$$\Sigma m \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{u} \mathfrak{r} \parallel \mathfrak{u} \tag{89}$$

oder auch gleich Null ist.

Dass es überhaupt in jedem Körper freie Axen giebt und welche, braucht im Augenblicke noch nicht entschieden zu werden. Einstweilen genügt die Aufstellung der Bedingung (89) und allenfalls noch die weitere Bemerkung, dass die Symmetrieaxe eines Rotationskörpers auf alle Fälle eine freie Axe ist.

§ 17. Der Drall in Bezug auf die Drehaxe selbst.

Auch der in Gl. (87) gegebene Werth für den Drall $\mathfrak{B}$ erfordert im einzelnen Falle noch die wirkliche Ausführung der durch die Summenzeichen vorgeschriebenen Summirungen. Ohne eine nähere Angabe über die Gestalt und Massenvertheilung des Körpers und über die Richtung der Schwerpunktsaxe, auf die er sich beziehen soll, lässt sich der Ausdruck nicht weiter vereinfachen. Dagegen kann man die Projektion des Momentes $\mathfrak{B}$ auf die Richtung von $\mathfrak{u}$ durch einen erheblich einfacheren Ausdruck darstellen. Diese Projektion ist nach den dafür früher (im ersten Bande) gegebenen Begriffserklärungen das statische Moment der Bewegungsgrösse für die Drehaxe $\mathfrak{u}$. Bezeichnen wir einen in der Richtung von $\mathfrak{u}$ gezogenen Einheitsvektor mit $\mathfrak{u}_1$, so ist die Projektion von $\mathfrak{B}$, die mit B' bezeichnet werden soll,

$$B' = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{u}_1,$$

also nach Einsetzen des aus Gl. (87) bekannten Werthes von $\mathfrak{B}$

$$B' = \mathfrak{u}\mathfrak{u}_1 \cdot \Sigma m \mathfrak{r}^2 - \Sigma m \mathfrak{u}_1 \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{u}\mathfrak{r}.$$

Nun ist aber $\mathfrak{u}\mathfrak{u}_1$ die Projektion von $\mathfrak{u}$ auf die eigene Richtung, also der Absolutwerth u der Winkelgeschwindigkeit. Ebenso kann man an Stelle von $\mathfrak{u}\mathfrak{r}$ auch $u \cdot \mathfrak{u}_1 \mathfrak{r}$ schreiben und die vorige Gleichung geht damit über in

$$B' = u \{ \Sigma m \mathfrak{r}^2 - \Sigma m (\mathfrak{u}_1 \mathfrak{r})^2 \}.$$

Beide Summen können wieder zu einer einzigen vereinigt werden, wodurch man

$$B' = u \Sigma m (\mathfrak{r}^2 - (\mathfrak{u}_1 \mathfrak{r})^2)$$

erhält. Der Ausdruck in der Klammer hat aber eine einfache Bedeutung: $\mathfrak{r}$ ist nämlich die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks, das beim Projiciren von $\mathfrak{r}$ auf die Richtung von $\mathfrak{u}$ entsteht und $\mathfrak{u}_1 \mathfrak{r}$ ist eine Kathete in diesem Dreiecke, nämlich