Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1901

§. 4. Die harmonische Schwingung

§ 4. Die harmonische Schwingung.

Ein materieller Punkt sei einer Centralkraft unterworfen, die der Entfernung vom Anziehungscentrum direct proportional ist. So lange er mit dem Anziehungscentrum selbst zusammenfällt, fehlt jeder Anlass zu einer Bewegung. Sobald er aber durch irgend eine äussere Ursache aus dieser Gleichgewichtslage entfernt und hierauf sich selbst überlassen wird, führt er Schwingungen um die Gleichgewichtslage aus, die man als harmonische oder auch als einfache Sinusschwingungen bezeichnet und deren Gesetze hier näher untersucht werden sollen.

Vorher möge indessen noch darauf hingewiesen werden, dass die Bedingungen für das Eintreten solcher Bewegungen sehr häufig gegeben sind. Vor allem sind es elastische Kräfte, unter deren Einfluss harmonische Schwingungen zu Stande kommen. Denkt man sich etwa einen Körper, der als materieller Punkt aufgefasst werden kann, durch elastische Bänder an einer bestimmten Stelle festgehalten, so vermag man ihn immer noch ein wenig aus dieser Ruhelage zu entfernen. Dabei werden die elastischen Bänder, durch die er festgehalten war, etwas angespannt und diesen Formänderungen entsprechen elastische Kräfte, die unter Voraussetzung des Hooke'schen Gesetzes der Verschiebung des materiellen Punktes proportional und nach dem Anfangspunkte hin gerichtet sind. Hiermit ist also in der That das Auftreten einer der Entfernung direct proportionalen Centralkraft physikalisch verwirklicht.

Gewöhnlich kann man freilich einen Körper, von dem man sagt, dass er harmonische Schwingungen ausführe, nicht ohne Weiteres als materiellen Punkt ansehen. Vielmehr treten unter den verschiedensten Umständen Schwingungen auf, die ihren Wirkungsgesetzen nach vollständig mit den harmonischen Schwingungen eines einzelnen materiellen Punktes zusammenfallen und die man daher auch selbst als harmonische bezeichnet. Dies trifft z. B. bei den sehr häufig vorkommenden Drehschwingungen eines Körpers um eine festliegende Axe, also etwa eines Körpers zu, der am unteren Ende eines Drahtes aufgehängt ist und unter dem Einflusse der Torsionselasticität des Drahtes schwingt (Torsionspendel, Drehwaage). Auch selbst Vorgänge, die ganz ausserhalb des Bereichs der Mechanik liegen, bezeichnet man als harmonische Schwingungen, weil sie den gleichen zeitlichen Verlauf nehmen, so dass die in der Dynamik des materiellen Punktes dafür abgeleiteten Formeln bei entsprechender Deutung der darin vorkommenden Buchstabengrössen ohne Weiteres auf jene Fälle angewendet werden können. Dies trifft namentlich bei gewissen elektrischen Schwingungen zu. So kommt es, dass die harmonischen Schwingungen eines einzelnen materiellen Punktes nur das einfachste Beispiel für eine Reihe verschiedener Schwingungsvorgänge bilden, bei deren Untersuchung von den hier durchzuführenden Betrachtungen mit geringen Aenderungen immer wieder Gebrauch gemacht wird.

Nach diesen Bemerkungen, die mir erforderlich schienen, um die grosse Tragweite hervorzuheben, die ihm zukommt, wende ich mich jetzt zur Behandlung des einfachen Falles, um den es sich hier handelt. Dabei möge zunächst ausserdem noch angenommen werden, dass die Schwingungen gradlinig erfolgen. Dies wird sicher geschehen, wenn der materielle Punkt etwas aus der Gleichgewichtslage verrückt und hierauf ohne Anfangsgeschwindigkeit sich selbst überlassen wurde, denn Kraft und Geschwindigkeit sind dann während der ganzen Bewegung stets längs derselben Geraden gerichtet, auf der die Bewegung erfolgt.

Es wird nützlich sein, über das Kraftfeld, in dem sich die Schwingung vollzieht, einige mit den im vorigen Paragraphen eingeführten Begriffen zusammenhängende Erörterungen vorauszuschicken. Die Kraftlinien sind hier sämmtlich gradlinig und nach dem Anfangspunkte gerichtet. Die Niveauflächen sind concentrische Kugelflächen. Die Stufenflächen der Potentialtreppe liegen um so enger zusammen, je weiter man sich vom Anfangspunkte entfernt. Wählt man die Constante V_0 in Gl. (10), wenn O den Anfangspunkt bedeutet, gleich Null, so wird das Potential V_A im Abstande a nach jener Gleichung

$$V_A = \int_0^a cx \cdot dx = c\frac{a^2}{2}.$$

Hierbei ist nämlich die Kraftlinie als Integrationsweg gewählt; c ist ein Proportionalitätsfaktor, durch dessen Multiplikation mit x die Kraft im Abstande x gefunden wird, also mit anderen Worten die Intensität des Feldes im Abstande 1 vom Anfangspunkte. Das in Gl. (10) vor dem Integrale stehende Minuszeichen fällt hier weg, denn in unserem Falle ist $\mathfrak{P}$ nach dem Anfangspunkte gerichtet und $d\mathfrak{s}$ ist, weil wir von O nach A hin integriren, entgegengesetzt gerichtet. Für $\mathfrak{P}d\mathfrak{s}$ erhält man daher hier $-cx \cdot dx$.

Der Ausdruck für das Potential V giebt zugleich die elastische Formänderungsarbeit jener Bänder oder Theile an, die den materiellen Punkt in die Ruhlage zurückzuführen suchen. In der That ist im vorliegenden Falle das Potential nur eine andere Bezeichnung für die in der Festigkeitslehre unter dem Namen Formänderungsarbeit so häufig benutzte Grösse.

Je weiter wir uns vom Anfangspunkte entfernen, desto grösser wird V. Im Verlaufe der Bewegung eines sich selbst überlassenen Punktes bleibt aber nach Gl. (15) die gesammte Energie $V + L$ constant. Daraus folgt, dass der Punkt immer innerhalb jener kugelförmigen Niveaufläche bleiben muss, deren Potential grade gleich dieser Gesammtenergie ist. Schon hieraus folgt, dass die Bewegung jedenfalls in einer Schwingung bestehen muss.

Die dynamische Grundgleichung liefert sofort die Differentialgleichung der Bewegung. Ich wähle die Gerade, längs der die Schwingung erfolgt, zur X-Axe, bezeichne die Masse des materiellen Punktes mit m, den Proportionalitätsfaktor, der die Intensität des Feldes beschreibt und der als gegeben zu betrachten ist, wie vorher schon mit c; dann lautet die Gleichung

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx. \tag{16}$$

Durch das Minuszeichen ist dem Umstande Rechnung getragen, dass die Kraft nach dem Ursprunge geht, während die Abscisse x nach aussen hin wächst. — Von Gl. (16) kennt man die allgemeinste, also mit zwei Constanten versehene Lösung; sie lautet

$$x = A \sin \alpha t + B \cos \alpha t, \tag{17}$$

worin A und B die willkürlichen Integrationsconstanten bedeuten, α aber eine Constante ist, die aus Gl. (16) gefunden wird. Differentiirt man nämlich x zweimal nach t, so erhält man

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\alpha^2(A \sin \alpha t + B \cos \alpha t),$$

also vom Minuszeichen abgesehen, das α^2-fache von x. Nach Gl. (16) soll dagegen $\frac{d^2x}{dt^2}$ das $-\frac{c}{m}$-fache von x sein. Daraus folgt, dass jedenfalls

$$\alpha = \sqrt{\frac{c}{m}} \tag{18}$$

gesetzt werden muss. Wenn dies geschieht, befriedigt aber Gl. (17) die Differentialgleichung (16) identisch.

Es bleibt jetzt nur noch übrig, die Integrationsconstanten A und B aus den Grenzbedingungen zu ermitteln. Zu diesem Zwecke möge festgesetzt werden, dass die Zeit t von einem Augenblicke an gerechnet werden soll, in dem x gleich Null war. Dazu muss nach Gl. (17) das den Cosinus der Zeit enthaltende Glied verschwinden, also $B = 0$ sein. Es bleibt hiernach

$$x = A \sin \alpha t \tag{19}$$

und die hier noch vorkommende Integrationsconstante A hat eine einfache und leicht ersichtliche Bedeutung. Sie stellt nämlich den grössten Werth dar, den x im Verlaufe der Zeit periodisch immer wieder annimmt, wenn der Sinus gleich der Einheit wird. Hiernach ist A der grösste Schwingungsausschlag oder die Amplitude der Schwingung. Diese muss entweder direct gegeben sein oder sie muss sich aus den Anfangsbedingungen, die bekannt sein müssen, wenn man im Stande sein soll, den weiteren Verlauf der Bewegung vorauszusagen, berechnen lassen. Wäre z. B. die Geschwindigkeit v_0 bekannt, mit der der Punkt zu Anfang der Zeit durch den Gleichgewichtspunkt ging, so hätte man aus Gl. (19)

$$\frac{dx}{dt} = \alpha A \cos \alpha t, \quad \text{also} \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = \alpha A$$

und hieraus folgte

$$A = \frac{v_0}{\alpha} \quad \text{und schliesslich} \quad x = \frac{v_0}{\alpha} \sin \alpha t.$$

Der Werth x in Gl. (19) nimmt öfters wieder die früheren Werthe an. Dies geschieht jedenfalls immer dann wieder, wenn der Winkel, von dem der Sinus genommen werden soll, um eine volle Umdrehung oder um 2π gewachsen ist. Auch in der Zwischenzeit nimmt der Sinus noch einmal den anfänglichen Werth an. Je nach der Lage, von der man hierbei ausgeht, dauert es aber bis dahin verschieden lang. Man achtet daher nicht auf diese erste Wiederkehr des Punktes in die vorige Lage, sondern erst auf die folgende, die stets nach Zuwachs des Winkels αt um 2π erfolgt und von der ab sich nachher beim weiteren Verlaufe der Zeit der Bewegungsvorgang genau wieder in derselben Weise wiederholt. Man nennt die Zeit, die während dessen verstreicht, also jene Zeit, die einem Anwachsen von αt um 2π entspricht, die Dauer einer vollen Schwingung. Wählt man dafür den Buchstaben T, so hat man

$$T = \frac{2\pi}{\alpha} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}\,. \tag{20}$$

Besonders zu beachten ist hierbei, dass T ganz unabhängig von A, also von der Amplitude der Schwingung ist. Die Schwingungsdauer hängt vielmehr nur von der Masse des schwingenden Punktes und von der durch den Faktor c ausgedrückten Stärke der elastischen Kraft ab, die ihn nach der Gleichgewichtslage hinzieht. Man nennt solche Schwingungen, deren Dauer unabhängig von der Grösse des Schwingungsausschlags ist, isochron und die hiermit ausgedrückte Eigenschaft ist als die wichtigste der harmonischen Schwingungen zu betrachten.

Zuweilen zieht man es vor, die Schwingung nur während der Zeit zu betrachten, in der die ganze Schwingungsbahn einmal in einem bestimmten Sinne durchlaufen wird, also die Rückkehr des Punktes gar nicht abzuwarten und als Schwingungsdauer nur jene Zeit zu rechnen, in der $\sin \alpha t$ von -1 bis $+1$ wächst. Dabei nimmt der Winkel αt um π zu und diese einfache Schwingungsdauer, wie man sie zum Unterschiede von der vorigen nennt, ist genau die Hälfte von T.

Bisher war nur von der gradlinigen harmonischen Schwingung die Rede. Der allgemeinere Fall, zu dem ich jetzt übergehe, lässt sich aber in ganz ähnlicher Weise erledigen. Er liegt immer dann vor, wenn der bewegliche Punkt zu irgend einer Zeit einmal eine Geschwindigkeit hatte, deren Richtungslinie nicht durch den Anfangspunkt ging, und weiterhin ohne äussere Einwirkung den Kräften des Feldes überlassen wurde.

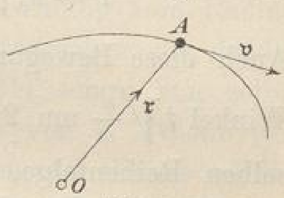

Abb. 7.

In Abb. 7 bedeutet O das Kraftcentrum (oder die Gleichgewichtslage des beweglichen Punktes), A die Lage, die der Punkt zur Zeit t einnimmt und $\mathfrak{v}$ die Geschwindigkeit. Die elastische Kraft kann hier nach Grösse und Richtung durch den Ausdruck

$$-c\mathfrak{r}$$

dargestellt werden, wenn c dieselbe Bedeutung hat wie vorher. Durch das Minuszeichen wird ausgedrückt, dass die Kraft dem Radiusvektor $\mathfrak{r}$ entgegengesetzt gerichtet ist. Die dynamische Grundgleichung lautet jetzt

$$m\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = -c\mathfrak{r}$$

und deren allgemeine Lösung ist

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{A}\sin \alpha t + \mathfrak{B}\cos \alpha t,$$

wenn wiederum $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die Integrationsconstanten bedeuten, die aber jetzt als gerichtete Grössen aufzufassen sind, während α dieselbe Bedeutung wie vorher hat, also gleich dem durch Gleichung (18) angegebenen Werthe zu setzen ist. In der

That überzeugt man sich durch Einsetzen des angegebenen Ausdrucks in die Differentialgleichung leicht, dass diese durch ihn für jede beliebige Wahl von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ erfüllt ist. — Zu Anfang der Zeit t möge $\mathfrak{r}$ gleich $\mathfrak{a}$ und die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ gleich $\mathfrak{v}_0$ gewesen sein. Hierdurch bestimmen sich die Integrationsconstanten zu

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{a} \quad \text{und} \quad \mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{v}_0}{\alpha},$$

so dass nach Einsetzen des Werthes von α die vollständig bestimmte Lösung lautet

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{v}_0 \sqrt{\frac{m}{c}} \cdot \sin t \sqrt{\frac{c}{m}} + \mathfrak{a} \cos t \sqrt{\frac{c}{m}} \tag{21}$$

Auch diese Bewegung ist eine periodische, denn sobald der Winkel $t\sqrt{\frac{c}{m}}$ um 2π gewachsen ist, wiederholen sich in derselben Reihenfolge wieder alle Werthe des Radiusvektors $\mathfrak{r}$ von Neuem. Der bewegliche Punkt durchläuft demnach in steter Reihenfolge unbegrenzt oft eine in sich geschlossene Curve. Die Zeit, die er zu einem vollen Umlaufe braucht, nennen wir wieder die Dauer einer vollen Schwingung und bezeichnen sie wiederum mit T. Dabei wird T aus der Bedingung

$$T\sqrt{\frac{c}{m}} = 2\pi, \quad \text{also} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}$$

gefunden. Dieser Werth stimmt aber genau mit dem in Gl. (20) für die geradlinige Schwingung gefundenen überein. Wir erkennen hieraus, dass die Schwingungen auch noch im allgemeinsten Falle isochron sind, d. h. dass die Schwingungsdauer nicht nur von der Grösse des Ausschlags, sondern auch von der besonderen Gestalt der Bahn unabhängig ist.

Es fragt sich jetzt noch, welche Form die Bahn besitzt. Auch diese Frage kann mit Hülfe von Gl. (21) sofort beantwortet werden. Diese Gleichung bildet nämlich in der Sprache der Vektorenrechnung schon von selbst die Gleichung der Bahn und zwar stellt sie die Gleichung einer Ellipse dar, deren

Mittelpunkt mit dem Kraftcentrum O zusammenfällt. Da aber die analytische Geometrie heutzutage an Stelle der Vektoren stets mit deren Componenten oder Coordinaten rechnet, bleibt mir noch übrig, Gl. (21) in zwei Componenten zu zerlegen, um damit auf die übliche Darstellungsform zu kommen. Um diesen Uebergang auf möglichst einfache Art bewirken zu können, nehme ich an, dass als Anfangspunkt der Zeitrechnung, auf den sich auch die zusammengehörigen Werthe von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{v}_0$ beziehen, ein Augenblick gewählt worden sei, in dem sich der bewegliche Punkt gerade im grössten oder auch im kleinsten Abstande vom Kraftcentrum befand. Dann steht in diesem Augenblicke die Bewegungsrichtung rechtwinklig zum Radiusvektor, d. h. es ist $\mathfrak{v}_0 \perp \mathfrak{a}$. Hiermit entsprechen die beiden Glieder auf der rechten Seite von Gl. (21) schon von selbst den beiden rechtwinkligen Componenten von $\mathfrak{r}$. Wenn wir dann noch die Richtung von $\mathfrak{a}$ zur Richtung der X-Axe wählen und die Y-Axe in die Richtung von $\mathfrak{v}_0$ legen, erhalten wir aus Gl. (21) für die Componenten x und y von $\mathfrak{r}$, d. h. für die Coordinaten des beweglichen Punktes die Gleichungen

$$x = a \cos t \sqrt{\frac{c}{m}}; \qquad y = v_0 \sqrt{\frac{m}{c}} \sin t \sqrt{\frac{c}{m}}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen eliminiren wir den veränderlichen Winkel mit Hülfe einer sehr bekannten Umformung, indem wir

$$\sin^2 t \sqrt{\frac{c}{m}} + \cos^2 t \sqrt{\frac{c}{m}} = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{v_0 \sqrt{\frac{m}{c}}}\right)^2 = 1$$

setzen. Damit sind wir aber in der That zu der gewöhnlichen Form der Mittelpunktsgleichung einer Ellipse gelangt, deren Halbaxen gleich a und gleich $v_0 \sqrt{\frac{m}{c}}$ sind. Diese Ellipse bildet die gesuchte Bahn des beweglichen Punktes.

Nebenbei sei darauf hingewiesen, dass auch bei der harmonischen Schwingung der vom Kraftcentrum gezogene Radiusvektor in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht, da diese

Eigenschaft, wie früher bewiesen wurde, allen Centralbewegungen zukommt.

§ 5. Gedämpfte Schwingungen.

Die bisher untersuchten Schwingungsbewegungen müssten, wenn sie einmal angeregt wären und dann vor allen äusseren Störungen geschützt werden könnten, unbegrenzt lange andauern, ohne jemals zu erlöschen oder sich auch nur irgendwie zu verändern. In Wirklichkeit beobachten wir aber stets, dass eine einmal angeregte Schwingung allmählich „abklingt“, d. h. dass die Schwingungsausschläge allmählich immer kleiner werden, bis sie sich zuletzt jeder Wahrnehmung entziehen. Der Grund dafür ist in besonderen Bewegungswiderständen, wie Reibung, Luftwiderstand, unvollkommene Elasticität u. s. w. zu suchen, die bisher vernachlässigt wurden. Um uns dem wirklichen Vorgange mehr zu nähern, wollen wir jetzt annehmen, dass ausser der elastischen Kraft des Feldes auch noch ein „dämpfender Widerstand“ von irgend einer Art auf den beweglichen Punkt einwirke, der in jedem Augenblicke der Bewegung des Punktes entgegen wirkt. Zugleich müssen wir aber, um die Aufgabe zu einer bestimmten zu machen, noch eine nähere Voraussetzung über das Wirkungsgesetz dieses Widerstandes einführen. Es steht nun zwar frei, die Rechnung unter verschiedenen Annahmen dieser Art durchzuführen und sich im gegebenen Falle dann für jenes Widerstandsgesetz zu entscheiden, bei dessen Wahl die Rechnungsergebnisse am besten mit der Beobachtung übereinstimmen. Man begnügt sich aber fast stets mit der einfachsten Annahme, die sich machen lässt, nämlich dass der Widerstand in jedem Augenblicke der Geschwindigkeit der Bewegung proportional sei. Wenn der dämpfende Widerstand in der Hauptsache im Luftwiderstande besteht und die Geschwindigkeiten der Schwingungsbewegung nicht sehr erheblich sind, trifft diese Annahme, wie aus der Uebereinstimmung der daraus abgeleiteten Formeln mit den Beobachtungen zu schliessen ist, in der That ziemlich genau zu. Noch besser ist die Voraussetzung erfüllt, wenn die Däm-