Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1901

§. 3. Das Potential

nochmals daran, dass in der Folge auch der allgemeinere Satz unter dieser Bezeichnung verstanden werden soll, der angiebt, wie sich das statische Moment der Bewegungsgrösse oder mit anderen Worten, wie sich die Sektorengeschwindigkeit oder die in der Zeiteinheit überstrichene Fläche ändert, wenn das statische Moment der äusseren Kraft für den gewählten Momentenpunkt von Null verschieden ist.

§ 3. Das Potential.

Der Begriff des Potentials, zu dessen Erläuterung ich jetzt übergehe, ist zuerst in der Mechanik der Himmelskörper eingeführt worden, um die Untersuchungen über gravitirende Massen zu erleichtern. Später wurde dieser Begriff auch auf andere Gebiete, namentlich auf die Lehre von der Elektricität und dem Magnetismus übertragen. Gerade hier hat er sich so nützlich erwiesen, dass er aus den höheren Theorien, in denen er ursprünglich allein vorkam, allmählich bis in die elementarsten Darstellungen übergegangen ist. Ueber einen aus der Mechanik hervorgegangenen Begriff, der sich auf ein so weit umfassendes Anwendungsgebiet zu erstrecken vermochte, kann ein Lehrbuch der Mechanik nicht allzu flüchtig hinweggehen, wenn auch die unmittelbaren Anwendungen, die hier davon gemacht werden sollen, nicht gerade sehr zahlreich sind.

Das Potential wird zur Untersuchung von Kraftfeldern verwendet. Man stelle sich etwa vor, dass irgendwelche Massen in beliebiger Vertheilung über den Raum gegeben seien, von denen Kräfte nach irgend einem bekannten und der Zeit nach constanten Gesetze auf einen sich in diesem Raume bewegenden materiellen Punkt übertragen werden. Das einfachste Beispiel ist, wie schon erwähnt, das Gravitationsproblem, bei dem diese Massen den bewegten Punkt nach dem Newton'schen Gesetze anziehen. Das ganze Gebiet, innerhalb dessen sich die Wirkung dieser Massen noch bemerklich macht, wird das Kraftfeld genannt. In dem genannten Beispiele kann die Kraft in jedem Punkte des Feldes als die Resultirende von Elementarkräften angesehen werden, die von den einzelnen Massenelementen ausgehen und dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional sind. Solche Kräfte, die im Einzelnen von festen Anziehungs- oder Abstossungscentren ausgehen und als Functionen des Abstandes gegeben sind, bezeichnet man in diesem Zusammenhange ganz allgemein als Centralkräfte.

Das Gravitationsproblem sollte übrigens hier nur als ein besonderes Beispiel angeführt werden, während wir es jetzt weiterhin ganz dahingestellt sein lassen wollen, auf welche Weise das Kraftfeld, dessen allgemeine Eigenschaften wir zu untersuchen beabsichtigen, in Wirklichkeit zu Stande kommt. Vor allem sei nun darauf hingewiesen, dass der Potentialbegriff nicht bei allen beliebig gegebenen Kraftfeldern verwendbar ist oder dass, wie man sich ausdrückt, nicht alle Kraftfelder ein Potential zulassen, oder nach einer anderen Ausdrucksweise, dass nicht alle aus einem Potentiale abgeleitet werden können. Dieser Umstand giebt den wichtigsten Eintheilungsgrund für die verschiedenen Kraftfelder ab, mit denen man sich in der theoretischen Physik zu befassen hat. Jene, die ein Potential zulassen, werden hiernach als wirbelfreie von den übrigen unterschieden, die man im Gegensatze dazu als Wirbelfelder bezeichnet.

Das allgemeine Kennzeichen dafür, dass ein Kraftfeld innerhalb eines gewissen Bezirks wirbelfrei ist, besteht darin, dass für jede geschlossene Curve, die man innerhalb dieses Bezirks ziehen mag, das über sie erstreckte Linienintegral der Kraft des Feldes gleich Null ist, oder in Zeichen

$$\int \mathfrak{P} d\mathfrak{s} = 0. \tag{8}$$

Diese Gleichung ist so zu verstehen, dass man sich einen beweglichen Punkt längs der ganzen Curve herumgeführt denkt und für jedes Wegeelement $d\mathfrak{s}$, das er hierbei beschreibt, das innere Produkt aus diesem Wege und der dort auftretenden Kraft $\mathfrak{P}$ des Feldes berechnet, worauf die Summirung über alle Linienelemente der ganzen Curve zu erstrecken ist. Nun ist aber $\mathfrak{P} d\mathfrak{s}$ nichts anderes, als die von der Kraft des Feldes bei der gedachten Bewegung geleistete Arbeit. Gl. (8) lässt sich daher auch dahin aussprechen, dass für das wirbelfreie Kraftfeld die algebraische Summe der an dem bewegten Punkte geleisteten Arbeiten für jede geschlossene Curve zu Null wird.

Wenn $\int \mathfrak{P} d\mathfrak{s}$ von Null verschieden und etwa positiv wäre, könnte man dadurch, dass man die betreffende Bahn wiederholt von dem bewegten Punkte in dem constanten Kraftfelde durchlaufen liesse, beliebig grosse Arbeitsmengen gewinnen, d. h. man wäre im Besitze eines Perpetuum mobile. Wäre $\int \mathfrak{P} d\mathfrak{s}$ negativ, so brauchte man nur den Umlaufssinn entgegengesetzt zu wählen, womit sich die Vorzeichen aller Arbeiten $\mathfrak{P} d\mathfrak{s}$ umkehrten und man hätte dann ebenfalls ein Perpetuum mobile vor sich.

Nach dem Gesetze von der Erhaltung der Energie könnte es hiernach scheinen, als wenn solche Kraftfelder überhaupt physikalisch unmöglich wären. In der That hat man diesen Schluss früher zuweilen gezogen; er wird aber hinfällig, wenn man bedenkt, dass die an dem bewegten Punkte gewonnene Arbeit recht wohl durch eine Energiezufuhr von anderer, nicht mechanischer Form aufgewogen werden kann. Das schlagendste Beispiel dafür ist ein gewöhnlicher electrodynamischer Motor. Wir sehen, wie sich der Anker einer als Motor betriebenen Dynamomaschine fortwährend umdreht und dabei Arbeit nach aussen abgiebt, während das Kraftfeld, in dem er rotirt, constant bleibt. Wenn man sich hier ausschliesslich auf den Boden der Mechanik stellen und die elektromagnetischen Energieströme, die daneben herlaufen, ausser Acht lassen wollte, hätte man in der That ein Perpetuum mobile mit allen mechanischen Eigenschaften vor sich, wie sie die alten Erfinder von einem solchen erwarteten. Wir wissen nun zwar, dass das Gesetz von der Erhaltung der Energie oder von der Unmöglichkeit eines Perpetuum mobile im neueren Sinne hierdurch nicht umgestossen wird; aber wir müssen doch diesem Beispiele die Lehre entnehmen, dass in der That Kraftfelder vorkommen, für die $\int \mathfrak{P} d\mathfrak{s}$ nicht gleich Null ist, die also nicht als wirbelfreie zu bezeichnen sind.

Dagegen lässt sich zeigen, dass alle Kraftfelder, die auf Centralkräfte zurückgeführt werden können, im ganzen Raume wirbelfrei sind. Um dies zu beweisen, nehme man zunächst an, dass nur ein einziges Anziehungscentrum vorhanden sei. Wir denken uns um dieses Centrum eine Kugelfläche von beliebigem Halbmesser beschrieben. Solange sich der angezogene Punkt nur auf der Oberfläche dieser Kugel bewegt, ist die von der Kraft $\mathfrak{P}$ des Feldes geleistete Arbeit stets gleich Null, denn $\mathfrak{P}$ fällt in jedem Augenblicke in die Richtung des Radius und steht daher senkrecht zu jedem Wege, den der bewegte Punkt auf der Kugelfläche beschreiben mag. Lässt man dagegen den Punkt auf eine concentrische Kugelfläche übertreten, deren Halbmesser etwa um dr grösser ist, so ist die von $\mathfrak{P}$ geleistete Arbeit gleich $-Pdr$, wie auch der Uebergang gewählt werden möge, denn von dem beschriebenen Wege kommt immer nur die Projektion dr auf die Richtung des Radius in Betracht. Daraus folgt, dass auch immer dieselbe Arbeit geleistet wird, wenn man den bewegten Punkt von dem Abstande r_1 zum Abstande r_2 vom Anziehungscentrum überführt, ohne Rücksicht auf den Weg, der hierbei im Uebrigen eingeschlagen wird. Für einen Weg, der wieder zum Ausgangspunkte zurückführt, hebt sich hiernach die Summe aller $\mathfrak{P}d\mathfrak{s}$ hinweg. — Dies gilt zunächst für ein einzelnes Anziehungscentrum. Hat man beliebig viele Kraftcentren, so beachte man, dass sich $\mathfrak{P}$ als die Resultirende aller von diesen ausgehenden Elementarkräfte auffassen lässt und dass die Arbeit der Resultirenden bei jeder beliebigen Bewegung gleich der algebraischen Summe aller Einzelarbeiten ist. Hiernach zerfällt $\int \mathfrak{P}d\mathfrak{s}$ in ebenso viele Glieder als Kraftcentren vorhanden sind und jedes dieser Glieder ist nach dem vorhergehenden Beweise für sich gleich Null. Wir können hiernach in der That allgemein behaupten, dass alle Kraftfelder wirbelfrei sind, die aus Centralkräften zusammengesetzt sind und dass es ein ganz vergebliches, früher freilich oft versuchtes Bemühen ist, solche nicht wirbelfreie Kraftfelder, wie das, in dem z. B. der Anker einer Dynamomaschine rotirt, auf Centralkräfte zurückzuführen.

Weiterhin möge nun angenommen werden, dass das Kraftfeld in der That wenigstens innerhalb eines gewissen Bezirks wirbelfrei ist, während es ausserhalb dieses Bezirks immer noch ein Wirbelfeld sein könnte. Ganz allgemein folgt dann aus Gl. (8), dass die Arbeit, die von der Kraft des Feldes geleistet wird, wenn der bewegliche Punkt von einem Punkte O nach einem Punkte A des Bezirks verschoben wird, unabhängig von dem dabei durchlaufenen Wege ist (falls dieser nur ganz innerhalb des Bezirkes selbst liegt).

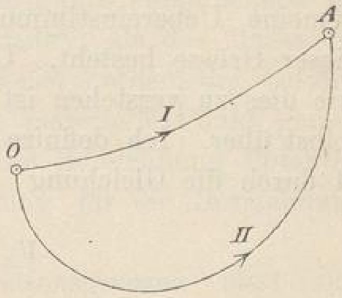

Abb. 4.

Denkt man sich nämlich etwa den Weg I in Abb. 4 im Sinne von O nach A und hierauf den Weg II im umgekehrten Sinne durchlaufen, so entsteht eine geschlossene Curve, für die nach Gl. (8)

$$\int_O^A \overline{\mathfrak{P}\, d\mathfrak{s}}^{\,I} + \int_A^O \overline{\mathfrak{P}\, d\mathfrak{s}}^{\,II} = 0$$

ist. Die Umkehrung des Bewegungssinnes hat einen Wechsel im Vorzeichen der Arbeitsbeträge zur Folge; hiernach ist

$$\int_A^O \overline{\mathfrak{P}\, d\mathfrak{s}}^{\,II} = -\int_O^A \overline{\mathfrak{P}\, d\mathfrak{s}}^{\,II},$$

und wenn man dies in die vorige Gleichung einsetzt, folgt in der That

$$\int_O^A \overline{\mathfrak{P}\, d\mathfrak{s}}^{\,I} = \int_O^A \overline{\mathfrak{P}\, d\mathfrak{s}}^{\,II}, \tag{9}$$

was zu beweisen war. Es ist hiernach entbehrlich, den Integrationsweg durch ein besonderes Kennzeichen hervorzuheben, wie es in diesen Formeln geschehen war; im wirbelfreien Kraftfelde hat vielmehr schon der unbestimmter gelassene Ausdruck

$$\int_O^A \mathfrak{P}\, d\mathfrak{s}$$

einen eindeutigen Werth. Der durch ihn angegebene Arbeitsbetrag heisst der **Potentialunterschied** zwischen den Punkten O und A. Hierbei muss ich noch erwähnen, dass keine allgemeine Uebereinstimmung über die Wahl des Vorzeichens dieser Grösse besteht. Um deutlicher hervortreten zu lassen, wie dies zu verstehen ist, gehe ich sofort zu den Potentialen selbst über. Ich definire hiernach das Potential V_A im Punkte A durch die Gleichung

$$V_A = V_O - \int_O^A \mathfrak{P}\,d\mathfrak{s}. \tag{10}$$

Hierin ist V_O das Potential im Anfangspunkte O, dem man sich einen beliebigen Werth gegeben denken mag. Bis auf die Constante V_O, die willkürlich bleibt, ist hiermit jedem Punkte A des Bezirks ein eindeutig bestimmter Werth, den man das Potential nennt, zugeordnet. Manche Schriftsteller wählen nun anstatt des vor dem Linienintegrale stehenden Minuszeichens ein Pluszeichen und definiren damit eine von der vorigen abweichende Grösse, die ebenfalls als Potential oder Potentialfunction oder auch als Kräftefunction von ihnen bezeichnet wird. Sehr erheblich ist der Unterschied zwar nicht; immerhin hat aber die Vorzeichenwahl, der ich mich angeschlossen habe, einen nicht unerheblichen Vorzug vor der entgegengesetzten. Die Grösse

$$-\int_O^A \mathfrak{P}\,d\mathfrak{s}$$

giebt nämlich den Arbeitsbetrag an, der von aussen her (durch eine der Feldkraft entgegengesetzte Kraft $-\mathfrak{P}$) aufgewendet werden muss, um den beweglichen materiellen Punkt entgegen der Kraft des Feldes von O nach A zu verschieben oder auch, wenn das Vorzeichen des Ausdruckes nach der vollständigen Ausrechnung negativ bleibt, den Arbeitsbetrag, der nach aussen hin während der Bewegung abgegeben werden kann. Hiernach wird V_A kleiner als V_O, wenn bei der Lagenänderung Energie nach aussen hin abgegeben, die Energie des Feldes selbst also

— falls Energieströme von nicht mechanischer Art ausgeschlossen sind — vermindert wird. Nach unserer Wahl des Vorzeichens kann hiernach unter der Voraussetzung, dass die Constante V_0 den Einzelbedingungen des besonderen Falles entsprechend gewählt wird, die Grösse V_A selbst geradezu als das Maass der potentiellen Energie des Feldes angesehen werden, die dadurch bedingt wird, dass sich der bewegte materielle Punkt gerade im Punkte A des Feldes befindet. Die Bezeichnung Potential stellt sich hiernach als eine Abkürzung für die Bezeichnung potentielle Energie heraus.

Durch Umkehrung der Integrationsgrenzen lässt sich übrigens ohne Aenderung der hiermit getroffenen Vereinbarung auch ein positives Vorzeichen in Gl. (10) einführen, denn die Gleichung

$$V_A = V_0 + \int_A^0 \mathfrak{P} d\mathfrak{s}$$

ist offenbar mit der früheren identisch.

Der Vortheil, den man mit der Einführung des Potentials in die Untersuchung der Kraftfelder erzielt, besteht darin, dass das Potential als ein Energiebetrag eine Grösse ohne Richtung ist. Mit diesen richtungslosen Grössen lässt sich leichter rechnen, als mit den Kräften des Feldes selbst. Dabei geht diese Vereinfachung der Rechnung keineswegs auf Kosten der Vollständigkeit der Resultate, die man ableiten will, denn sobald das Potential überall im Felde bekannt ist, kennt man damit zugleich auch die Kraft an jeder Stelle des Feldes, nach Grösse und Richtung, wie ich sofort zeigen werde.

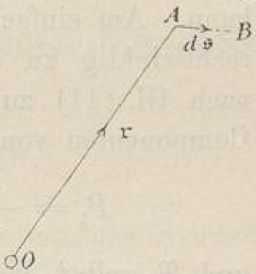

Abb. 5.

Man denke sich nämlich den beweglichen Punkt von der Stelle A aus, in der er sich vorher befand, nach irgend einem Nachbarpunkte B (Abb. 5) verschoben. Dann ist das Potential V_B im Punkte B nach der vorher dafür gegebenen Definition

$$V_B = V_0 - \left[\int_0^A \mathfrak{P} d\mathfrak{s} + \int_A^B \mathfrak{P} d\mathfrak{s} \right] = V_A - \mathfrak{P} d\mathfrak{s},$$

denn für das Linienintegral längs des Weges AB kann, da dieser sehr klein sein sollte, einfach das Element $\mathfrak{P}d\mathfrak{s}$ gesetzt werden, wenn hierbei unter $d\mathfrak{s}$ die Strecke AB selbst verstanden wird. Bezeichnet man ferner die Aenderung, die das Potential V erfährt, wenn man von A nach B übergeht, mit dV, so kann die vorige Gleichung auch in der Form

$$dV = -\mathfrak{P}d\mathfrak{s}$$

angeschrieben werden. Aus dieser kann aber in der That sofort auf die Grösse der in die Richtung von AB fallenden Componente von $\mathfrak{P}$ geschlossen werden, wenn man weiss, wie gross die zu $d\mathfrak{s}$ gehörige Aenderung von V ist. Bezeichnet man jene Feldcomponente, also die Projektion von $\mathfrak{P}$ auf $d\mathfrak{s}$ mit P' so ist nämlich auch

$$dV = -P'ds \quad \text{und daher} \quad P' = -\frac{dV}{ds}. \tag{11}$$

Hiermit allein ist nun zwar $\mathfrak{P}$ noch nicht bestimmt; man beachte aber, dass diese Beziehungen für jede beliebige Verschiebungsrichtung AB gültig bleiben und dass man daher die Projektion der gesuchten Kraft $\mathfrak{P}$ auf jede beliebige Richtungslinie anzugeben vermag, womit auch $\mathfrak{P}$ selbst gefunden werden kann. Am einfachsten ist es, die Projektionen von $\mathfrak{P}$ auf drei rechtwinklig zu einander stehende Coordinatenaxen der xyz nach Gl. (11) zu berechnen. Man erhält dann für die drei Componenten von $\mathfrak{P}$

$$P_1 = -\frac{\partial V}{\partial x}; \quad P_2 = -\frac{\partial V}{\partial y}; \quad P_3 = -\frac{\partial V}{\partial z} \tag{12}$$

und $\mathfrak{P}$ selbst wird als geometrische Summe dieser Componenten, also mit Benutzung der Richtungsfaktoren $\mathfrak{i}\,\mathfrak{j}\,\mathfrak{k}$ in der Form

$$\mathfrak{P} = -\left(\mathfrak{i}\frac{\partial V}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial V}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial V}{\partial z}\right) \tag{13}$$

gefunden. Hiermit ist die Aufgabe gelöst, $\mathfrak{P}$ anzugeben, wenn V überall bekannt ist und man sieht, dass hiezu nur eine Ausführung von Differentiationen erforderlich ist, die keine besonderen Schwierigkeiten verursachen kann.

Der mit dem negativen Vorzeichen versehene Differentialquotient $-\frac{\partial V}{\partial x}$ giebt an, um wie viel V in der Richtung der X-Axe auf die Längeneinheit des Weges bezogen an der betreffenden Stelle des Feldes abnimmt. Man bezeichnet diese Grösse kürzer als das Potentialgefäll und fasst dann die Gl. (11) und (12) in der Aussage zusammen:

Die Componente der Kraft in irgend einer gegebenen Richtung ist gleich dem Potentialgefälle in dieser Richtung.

Auch die Richtung der Kraft $\mathfrak{P}$ selbst lässt sich mit Hülfe dieser Bezeichnung in einfacher Weise angeben. Offenbar wird nämlich die Componente von $\mathfrak{P}$ am grössten für eine Richtung, die mit $\mathfrak{P}$ zusammenfällt. Hieraus folgt in Verbindung mit der vorigen Aussage:

Die Kraft des Feldes geht in der Richtung des grössten Potentialgefälles und ihr Absolutbetrag ist gleich diesem Gefälle.

Schliesslich erwähne ich noch, dass man Gl. (13) zweckmässig in die abgekürzte Schreibweise

$$\mathfrak{P} = -\nabla V \tag{14}$$

zusammenfassen kann, in der ∇ ein „räumlicher Differentialoperator“ ist, nämlich an die Stelle von

$$\nabla = \mathfrak{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

tritt und hiermit jene Operation durch ein einziges Symbol kennzeichnet, durch die das Gefäll der Grösse V gefunden wird. Als zweckmässig ist übrigens diese Bezeichnung nicht etwa bloss deshalb anzusehen, weil Gl. (14) mit weniger Schriftzeichen geschrieben wird als Gl. (13) oder der damit gleichwerthige Verein der Gl. (12), sondern weil es die Einheit der Vorstellung fördert, wenn einem an sich einfachen Begriffe, der selbst sprachlich durch ein einziges Wort („Potentialgefäll“ oder vielmehr noch kürzer „Gefäll“ überhaupt) wiedergegeben werden kann, auch in der Rechnung durch ein einfaches und nicht weiter zusammengesetztes Zeichen Ausdruck gegeben wird.

Zur besseren Veranschaulichung der vorausgehenden Betrachtungen dient eine sehr bekannte geometrische Construction. Von einem Punkte des Kraftfeldes ausgehend, sucht man nämlich alle Nachbarpunkte auf, in denen das Potential den gleichen Werth besitzt. Alle diese Punkte liegen auf einem Flächenelemente, das senkrecht zur Feldkraft $\mathfrak{P}$ gestellt ist, denn nur für eine Verschiebung $d\mathfrak{s}$ senkrecht zu $\mathfrak{P}$ wird das zugehörige $\mathfrak{P}d\mathfrak{s}$ und hiermit dV zu Null. Geht man hierauf in derselben Weise nach allen Seiten hin weiter fort, so erhält man eine Fläche, die jene Punkte des Feldes mit einander verbindet, für die das Potential denselben Wert V besitzt. Eine solche Fläche wird als eine Aequipotentialfläche oder kürzer als eine Niveaufläche bezeichnet.

Wir wollen annehmen, dass eine ganze Schaar von solchen Niveauflächen im Felde construirt sei und zwar derart, dass sich das Potential von je aufeinanderfolgenden Flächen immer um den gleichen Betrag unterscheidet. Man kann dann jede dieser Niveauflächen als eine Stufenfläche und die Schaar aller Stufenflächen als eine Potentialtreppe bezeichnen. Je steiler diese Treppe ist, d. h. je dichter die Stufenflächen aufeinander folgen, um so grösser ist an der betreffenden Stelle die Kraft des Feldes, die ja, wie wir aus Gl. (14) wissen, gleich dem Potentialgefälle ist. Hiernach kann man aus einer Zeichnung der Potentialtreppe alle Eigenschaften des Kraftfeldes ableiten Der Abstand aufeinanderfolgender Stufenflächen giebt ein der unmittelbaren Abschätzung bequem zugängliches Maass für die Grösse der Kraft und die Richtung der Kraft wird durch die Normale zur Stufenfläche angegeben.

Häufig giebt man, um die Richtung der Kraft des Feldes besser hervortreten zu lassen, an Stelle der Potentialtreppe oder auch neben dieser die Kraftlinien an. Das sind Linien, die von irgend einem Punkte des Feldes ausgehend, weiterhin überall der Richtung von $\mathfrak{P}$ folgen. Die Richtung der Kraft an irgend einer Stelle wird hiernach durch die Tangente an die Kraftlinie angegeben. Die Kraftlinien schneiden alle Niveauflächen rechtwinklig.

Aus dem Begriffe der Kraftlinie geht auch der Begriff der Kraftröhre hervor. Man versteht darunter den röhrenförmigen Raum, der von allen unmittelbar aufeinanderfolgenden Kraftlinien abgegrenzt wird, die man durch sämmtliche Punkte des Umfangs irgend eines auf einer Niveaufläche enthaltenen Flächenstücks legen kann. Dieses Flächenstück bildet hiernach einen Querschnitt der Kraftröhre. Der Querschnitt bleibt im Allgemeinen nicht constant, sondern zu jeder folgenden Niveaufläche gehört ein anderer Querschnitt. Unter den gewöhnlich vorliegenden Umständen (nämlich dann, wenn keine „Quellen des Kraftflusses“ in der Kraftröhre enthalten sind) ist die Kraft des Feldes an jeder Stelle dem Querschnitte der Kraftröhre umgekehrt proportional. In solchen Fällen kann man die Grösse der Feldkraft auch danach abschätzen, wie dicht die Kraftlinien an der betreffenden Stelle zusammenrücken. Der Beweis der letzteren Behauptungen würde mich weiter führen, als es hier meine Absicht sein kann; ich erlaube mir daher, den Leser, der sich mit diesen knappen Andeutungen nicht begnügen möchte, auf die im Jahre 1897 von mir veröffentlichte kleine Schrift „Die Geometrie der Wirbelfelder“ zu verweisen.

Das Kraftfeld, mit dem man es in der Mechanik gewöhnlich zu thun hat, ist das Schwerefeld der Erde. Innerhalb eines kleinen Raumes, etwa innerhalb eines Zimmers, kann die Schwerkraft nach Grösse und Richtung gewöhnlich als constant angesehen werden, obwohl ich nicht unerwähnt lassen möchte, dass man besondere Beobachtungsmethoden ausgesonnen hat, die selbst die Aenderungen des Feldes innerhalb so kleiner Räume erkennen lassen. Sehen wir aber davon ab, oder betrachten wir, wie man auch sagt, das Feld als homogen, so sind die Kraftlinien unter sich parallel; ihre Richtung ist die der Lothlinie. Die Niveauflächen sind horizontale Ebenen und jeder kommt ein Potential zu, das um so grösser ist, je höher sie liegt. Die Potentialtreppe ist hier überall gleich steil, da die einzelnen Stufenflächen in gleichen Abständen über einander liegen.

In einem grösseren Bezirke macht sich aber die Krümmung der Niveauflächen bemerkbar. Streng wissenschaftlich gesprochen versteht man unter der Gestalt der Erde nichts anderes, als die Gestalt jener Fläche gleichen Potentials, die über dem Meere unter normalen Umständen mit der Wasseroberfläche zusammenfällt. Daraus erklärt sich auch die Bezeichnung der Niveauflächen. Jene praktisch besonders wichtige Niveaufläche wird auch als das Geoid bezeichnet. — Hier möge von diesen Dingen nur noch erwähnt werden, dass der Begriff des Höhenunterschiedes zweier Punkte der Erdoberfläche (z. B. die Höhe einer Bergspitze über dem Meere) in der gewöhnlichen Fassung einer strengeren Kritik nicht Stand hält. Eindeutig bestimmbar ist vielmehr nur der Potentialunterschied beider Punkte. In der That wird auch der Höhenunterschied der Punkte, wenn er in gewöhnlicher Weise durch ein genaues Nivellement bestimmt wird, etwas verschieden gefunden (auch abgesehen von den unvermeidlichen Beobachtungsfehlern) je nach dem Wege, längs dessen das Nivellement erfolgte. Man macht sich am einfachsten auf folgende Weise klar, dass dies gar nicht anders erwartet werden kann. Man denke sich durch beide Punkte, etwa A und B, Abb. 6, deren Höhenunterschied ermittelt werden soll, je eine Niveaufläche gelegt.

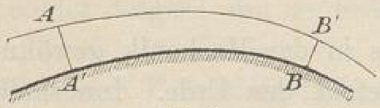

Abb. 6.

Ein denkbarer Weg für die Ausführung des Nivellements würde dann darin bestehen, dass man zuerst von B senkrecht in die Höhe steigt, bis B' die Erhebung BB' misst und dann stets horizontal von B' nach A fortschreitet. Der Höhenunterschied von A und B würde dann gleich BB' gefunden. Man sieht aber nun sofort, dass man anstatt dessen auch von B längs der Niveaufläche bis A' fortschreiten und dann erst von hier nach A hinaufsteigen könnte. Im letzten Falle würde der Höhenunterschied gleich AA' gefunden. Im Allgemeinen sind aber AA' und BB' keineswegs gleich miteinander; wenn die

Fallbeschleunigung zwischen A und A' kleiner ist, als zwischen B und B', muss, weil $\int \mathfrak{P} d\mathfrak{s}$ für beide Strecken gleich ist, die Höhe AA' im selben Verhältniss grösser sein, als die bei B gefundene Höhe BB'. — Die weitere Ausführung dieser Betrachtungen gehört der höheren Geodäsie an.

Die Kraftlinien dürfen übrigens, wie ich hier noch besonders betonen möchte, nicht mit den Bahnen verwechselt werden, die ein im Kraftfelde frei beweglicher materieller Punkt einzuschlagen vermag. Wenn der Punkt ohne Anfangsgeschwindigkeit in das Feld gebracht wird, fängt er zwar im ersten Augenblicke seine Bewegung in der Richtung der Kraftlinie an. Aber nur dann, wenn die Kraftlinie gerade ist (wie es genau genug bei der gewöhnlichen Fallbewegung zutrifft), vermag der Punkt ihr dauernd zu folgen; im anderen Falle biegt er aus leicht verständlichen Gründen alsbald von ihr ab.

Durch Verbindung der Gleichung der lebendigen Kraft mit der Definitionsgleichung für das Potential gelangt man schliesslich noch für den im Felde frei beweglichen Punkt zu einem einfachen Resultate. Für die Bewegung von einer Stelle 1 des Feldes nach irgend einer anderen Stelle 2 hat man beim frei beweglichen Punkte nach dem Satze von der lebendigen Kraft

$$\int_1^2 \mathfrak{P} d\mathfrak{s} = \frac{m \mathfrak{v}_2^2}{2} - \frac{m \mathfrak{v}_1^2}{2} = L_2 - L_1,$$

wobei zur Abkürzung die lebendige Kraft mit L bezeichnet wurde. Andererseits ist aber nach Gl. (10)

$$V_2 = V_1 - \int_1^2 \mathfrak{P} d\mathfrak{s}$$

und aus der Verbindung beider Gleichungen mit einander folgt

$$V_2 + L_2 = V_1 + L_1, \tag{15}$$

d. h. die Summe aus potentieller und kinetischer Energie bleibt während der Bewegung constant.