Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

Zusammenhang des Hertz´schen Problems mit der Potentialtheorie.

urn:nbn:de:hbz:466:1-84594

der Vorrede erwähnte Werk von Love, Treatise on the theory of Elasticity, 2 vol., Cambridge 1892—1893 verwiesen werden muss.

Auch Hertz giebt ein System von Verschiebungscomponenten $\xi\ \eta\ \zeta$ an, das mit den allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen verträglich ist und die Grenzbedingungen befriedigt. Dabei wird angenommen, dass zwei Körper mit beliebig gestalteter Oberfläche aufeinander gedrückt werden, dass aber die Abmessungen der Druckfläche klein im Vergleiche zu den Krümmungshalbmessern der Oberflächen bleiben. Der wesentliche Unterschied gegenüber den Untersuchungen des vorigen Paragraphen besteht indessen darin, dass ein Ausdruck für den Zwangszustand aufgestellt wird, der gerade in der Druckfläche und deren Umgebung die Erscheinungen genau darstellt, während in endlichen Entfernungen davon die Verschiebungen $\xi\ \eta\ \zeta$ im Vergleiche hiermit nahezu verschwinden.

Zunächst zeigt sich, dass die Druckfläche die Gestalt eines Kegelschnitts annimmt, dass sie also etwa durch eine Ellipse oder in besonderen Fällen durch einen Kreis begrenzt wird.

Die Ausdrücke für die Verschiebungscomponenten sind hier complicirter als bei Boussinesq. Man kann sich die Sache etwa in folgender Weise klar machen. Drückt man die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen in der Form von Gl. (296)

$$\nabla^2 \mathfrak{v} + \frac{m}{m-2} \nabla \operatorname{div} \mathfrak{v} = 0$$

aus, so weiss man zunächst aus der Potentialtheorie, dass die Kraft $\mathfrak{v}$, die von irgendwie gelegenen Massen nach dem Gesetze des umgekehrten Quadrats der Entfernung ausgeht, überall ausserhalb der Massen, diese Gleichung befriedigt. Man denke sich also etwa die Druckfläche mit einer solchen Masse, z. B. mit Electricität nach einem bestimmten Dichtigkeitsgesetze belegt und die davon ausgehende electrostatische Kraft abgeleitet. Setzt man dann die Verschiebung im elastischen Körper der gefundenen Kraft überall proportional, so hat man schon einen möglichen Zwangszustand. Dieser befriedigt aber noch nicht die vorgeschriebenen Grenzbedingungen. Man kann aber von da aus auch zu verwandten Functionen übergehen, die ebenfalls die Grundgleichung erfüllen und so nach einigem Probiren zu der wirklichen Lösung gelangen. Auf diesem Wege scheint wenigstens Hertz, obschon er sich selbst nicht darüber ausspricht, zu seinem Resultate gelangt zu sein.

Die Potentialfunction der auf der Druckfläche vertheilten Massen sei mit V bezeichnet. Dann bilde man eine neue Function Π, die durch die Gleichung

$$\Pi = azV + b\int_z^\infty V dz \tag{370}$$

definirt ist und setze

$$\xi = \frac{\partial \Pi}{\partial x}; \quad \eta = \frac{\partial \Pi}{\partial y}; \quad \zeta = \frac{\partial \Pi}{\partial z} + cV. \tag{371}$$

Man kann ohne Schwierigkeit nachweisen, dass dieses System von Verschiebungen die Grundgleichungen befriedigt, falls zwischen den Constanten a, b, c die Bedingung

$$2a + \frac{m}{m-2}(2a + c) = 0 \tag{372}$$

erfüllt wird. Dann wendet man sich der Untersuchung der Grenzbedingungen zu. Auf der Körperoberfläche sollen die Schubspannungen überall verschwinden. Wenn man τ_{zx} und τ_{zy} bildet, überzeugt man sich, dass dies zutrifft, wenn zwischen den Constanten a, b, c noch die fernere Bedingungsgleichung

$$2a - 2b + c = 0 \tag{373}$$

besteht. Dann bildet man σ_z; man erhält nach einigen Umrechnungen, nachdem man b und c mit Hülfe von Gl. (372) und (373) eliminirt hat,

$$\sigma_z = 2aG\left(z\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \frac{\partial V}{\partial z}\right). \tag{374}$$

An der Körperoberfläche, also für $z = 0$ wird dies

$$\sigma_{z,0} = -2aG\frac{\partial V}{\partial z}. \tag{375}$$

Dies wird aber in der That überall zu Null, mit Ausnahme des Inneren der Druckfläche. Zugleich sieht man jetzt auch den Grund ein, weshalb die gravitirenden Massen, von denen das Potential V zu nehmen war, über die Druckfläche vertheilt sein mussten.

Das ist so etwa im grossen Ganzen der Gedankengang der Hertz'schen Untersuchung; natürlich sind dabei beide Körper ins Auge zu fassen und auf das gegenseitige Verhalten beider beziehen sich auch noch einige Grenzbedingungen, worauf ich aber hier nicht weiter eingehen will.

Die wichtigsten Resultate, zu denen Hertz dabei gelangte, sind folgende. Man denke sich im natürlichen Zustande, wenn beide Körper sich nur in einem Punkte berühren, in nächster Nachbarschaft des Berührungspunktes, alle zusammengehörigen Punkte beider Oberflächen aufgesucht, die einen constanten kleinen Abstand e in der Richtung der Z-Axe voneinander besitzen. Diese Punkte geben bei ihrer Projection auf die Berührungsebene eine Ellipse. Die Druckfläche ist dann auch eine Ellipse von denselben Axenrichtungen; dagegen ist das Verhältniss der Axen von dem der Ellipse $e = \text{const.}$ verschieden. Für die beiden Halbaxen a und b der Druckfläche findet Hertz

$$\left.\begin{aligned} a &= \mu \sqrt[3]{\frac{3P(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{8(\varrho_{11} + \varrho_{12} + \varrho_{21} + \varrho_{22})}} \\ b &= \nu \sqrt[3]{\frac{3P(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{8(\varrho_{11} + \varrho_{12} + \varrho_{21} + \varrho_{22})}} \end{aligned}\right\} . \tag{376}$$

Die Zahlen-Coefficienten μ und ν sind nur von dem Axenverhältnisse der Ellipse $e = \text{const.}$ abhängig. Hertz gibt dafür eine Tabelle. Wenn die Ellipsen $e = \text{const.}$ zu Kreisen werden, ist $\mu = \nu = 1$ und die Druckfläche wird auch ein Kreis. P ist der Druck, mit dem beide Körper aufeinander gepresst werden; ϑ_1 und ϑ_2 sind Elasticitätsconstanten der beiden aufeinander gepressten Körper und zwar ist für jeden nach den in diesem Buche gebrauchten Bezeichnungen

$$\vartheta = \frac{4(m^2 - 1)}{m^2 E} = \frac{2(m - 1)}{mG}$$

zu setzen. Ferner bedeuten die ϱ die 4 Hauptkrümmungen beider Körper im natürlichen Zustande an der Berührungsstelle (also die reciproken Werthe der Hauptkrümmungshalbmesser).

Die Vertheilung des Normaldrucks σ_z über die Druckfläche wird durch die Formel

$$\sigma_z = \frac{3P}{2ab\pi}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \tag{377}$$

dargestellt. Am Rande der Druckfläche ist $\sigma_z = 0$ und nach der Mitte hin wächst es wie die Ordinaten eines über der Druckfläche construirten Ellipsoids. In der Mitte wird σ_z am grössten und zwar $1\frac{1}{2}$ mal so gross als im Durchschnitte für die ganze Fläche. Bezeichnet man den grössten Werth von σ_z mit σ_0, so wird speciell für kreisförmige Druckflächen

$$\sigma_0 = \frac{3}{2\pi}\sqrt[3]{P\left\{\frac{8(\varrho_{11} + \varrho_{12} + \varrho_{21} + \varrho_{22})}{3(\vartheta_1 + \vartheta_2)}\right\}^2} \tag{378}$$

und die Annäherung α, die beide Körper durch die Abplattung erfahren, wird

$$\alpha = \frac{3P(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{16a}. \tag{379}$$

Der Halbmesser der Druckfläche wächst proportional mit der dritten Wurzel des Druckes P und in demselben Maasse wächst auch die Beanspruchung des Materials; die Annäherung α wächst dagegen proportional mit der zweidrittelten Potenz von P.

Speciell wird für zwei Kugeln aus demselben Materiale mit den Halbmessern r_1 und r_2 nach Umrechnung der Elasticitätsconstanten ϑ auf E und mit $m = \frac{10}{3}$

$$a = 1{,}11\sqrt[3]{\frac{P}{E}\cdot\frac{r_1 r_2}{r_1 \pm r_2}}. \tag{380}$$

Das untere Vorzeichen im Nenner ist zu nehmen, wenn die eine Kugel eine Hohlkugel ist. Ferner wird

$$\sigma_0 = 0{,}388\sqrt[3]{PE^2\left(\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2}\right)^2}, \tag{381}$$

$$\alpha = 1{,}23\sqrt[3]{\frac{P^2}{E^2}\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2}}. \tag{382}$$