Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

§. 72. Fortsetzung. Theorie von Hertz.

angeben, die man sich, wenn es gewünscht wird, leicht selbst ableiten kann.

Es genügt, wenn man den Spannungszustand für alle Punkte untersucht, die auf irgend einer durch die Z-Axe gelegten Ebene enthalten sind, da für alle anderen Ebenen dieser Art dasselbe gilt. Wir wählen dazu die XZ-Ebene. Ausserdem ziehe man eine horizontale Ebene $z =$ const., die die XZ-Ebene in einer wagrechten Linie schneidet. Für alle Punkte dieser Linie wird (wie übrigens schon aus Symmetriegründen zu schliessen ist) τ_{zy} zu Null. Die Spannungscomponenten σ_z und τ_{zx} setze man zur resultirenden Spannung p für den wagrechten Schnitt zusammen. Man findet dann, dass die Richtung von p durch den Ursprung geht und der Grösse nach durch die Formel

$$p = \frac{3 P z^2}{2 \pi r^4} \tag{369}$$

dargestellt wird. Ferner denke man sich einen Kreis von beliebigem Halbmesser durch den Ursprung gelegt, dessen Mittelpunkt auf der Z-Axe enthalten ist. Für alle Punkte dieses Kreises nimmt dann, wie sich leicht zeigen lässt, p denselben Werth an. — Damit hat man schon ein ziemlich deutliches Bild der Spannungsvertheilung gewonnen, namentlich wenn noch hinzugefügt wird, dass p umgekehrt proportional dem Quadrate des Halbmessers dieses Kreises ist.

§ 72. Fortsetzung; Theorie von Hertz.

Die Hertz'sche Theorie bewegt sich in ganz ähnlichen Bahnen, wie die von Boussinesq, macht aber dabei noch etwas mehr Rechnungen erforderlich. Aus diesem Grunde habe ich mich hier für eine etwas ausführlichere Behandlung der Boussinesq'schen Theorie entschieden, während ich mich darauf beschränken werde, von der Hertz'schen nur die wichtigsten Resultate mitzutheilen. Es kommt mir hier eigentlich nur darauf an, eine ungefähre Vorstellung von dem Gedankengange solcher Betrachtungen zu geben, während für ein eingehenderes Studium auf die Originalarbeiten oder auch auf das schon in der Vorrede erwähnte Werk von Love, Treatise on the theory of Elasticity, 2 vol., Cambridge 1892—1893 verwiesen werden muss.

Auch Hertz giebt ein System von Verschiebungscomponenten $\xi\ \eta\ \zeta$ an, das mit den allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen verträglich ist und die Grenzbedingungen befriedigt. Dabei wird angenommen, dass zwei Körper mit beliebig gestalteter Oberfläche aufeinander gedrückt werden, dass aber die Abmessungen der Druckfläche klein im Vergleiche zu den Krümmungshalbmessern der Oberflächen bleiben. Der wesentliche Unterschied gegenüber den Untersuchungen des vorigen Paragraphen besteht indessen darin, dass ein Ausdruck für den Zwangszustand aufgestellt wird, der gerade in der Druckfläche und deren Umgebung die Erscheinungen genau darstellt, während in endlichen Entfernungen davon die Verschiebungen $\xi\ \eta\ \zeta$ im Vergleiche hiermit nahezu verschwinden.

Zunächst zeigt sich, dass die Druckfläche die Gestalt eines Kegelschnitts annimmt, dass sie also etwa durch eine Ellipse oder in besonderen Fällen durch einen Kreis begrenzt wird.

Die Ausdrücke für die Verschiebungscomponenten sind hier complicirter als bei Boussinesq. Man kann sich die Sache etwa in folgender Weise klar machen. Drückt man die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen in der Form von Gl. (296)

$$\nabla^2 \mathfrak{v} + \frac{m}{m-2} \nabla \operatorname{div} \mathfrak{v} = 0$$

aus, so weiss man zunächst aus der Potentialtheorie, dass die Kraft $\mathfrak{v}$, die von irgendwie gelegenen Massen nach dem Gesetze des umgekehrten Quadrats der Entfernung ausgeht, überall ausserhalb der Massen, diese Gleichung befriedigt. Man denke sich also etwa die Druckfläche mit einer solchen Masse, z. B. mit Electricität nach einem bestimmten Dichtigkeitsgesetze belegt und die davon ausgehende electrostatische Kraft abgeleitet. Setzt man dann die Verschiebung im elastischen Körper der gefundenen Kraft überall proportional, so hat man schon einen möglichen Zwangszustand. Dieser befriedigt aber noch nicht die vorgeschriebenen Grenzbedingungen. Man kann aber von da aus auch zu verwandten Functionen übergehen, die ebenfalls die Grundgleichung erfüllen und so nach einigem Probiren zu der wirklichen Lösung gelangen. Auf diesem Wege scheint wenigstens Hertz, obschon er sich selbst nicht darüber ausspricht, zu seinem Resultate gelangt zu sein.

Die Potentialfunction der auf der Druckfläche vertheilten Massen sei mit V bezeichnet. Dann bilde man eine neue Function Π, die durch die Gleichung

$$\Pi = azV + b\int_z^\infty V dz \tag{370}$$

definirt ist und setze

$$\xi = \frac{\partial \Pi}{\partial x}; \quad \eta = \frac{\partial \Pi}{\partial y}; \quad \zeta = \frac{\partial \Pi}{\partial z} + cV. \tag{371}$$

Man kann ohne Schwierigkeit nachweisen, dass dieses System von Verschiebungen die Grundgleichungen befriedigt, falls zwischen den Constanten a, b, c die Bedingung

$$2a + \frac{m}{m-2}(2a + c) = 0 \tag{372}$$

erfüllt wird. Dann wendet man sich der Untersuchung der Grenzbedingungen zu. Auf der Körperoberfläche sollen die Schubspannungen überall verschwinden. Wenn man τ_{zx} und τ_{zy} bildet, überzeugt man sich, dass dies zutrifft, wenn zwischen den Constanten a, b, c noch die fernere Bedingungsgleichung

$$2a - 2b + c = 0 \tag{373}$$

besteht. Dann bildet man σ_z; man erhält nach einigen Umrechnungen, nachdem man b und c mit Hülfe von Gl. (372) und (373) eliminirt hat,

$$\sigma_z = 2aG\left(z\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \frac{\partial V}{\partial z}\right). \tag{374}$$

An der Körperoberfläche, also für $z = 0$ wird dies

$$\sigma_{z,0} = -2aG\frac{\partial V}{\partial z}. \tag{375}$$

Dies wird aber in der That überall zu Null, mit Ausnahme des Inneren der Druckfläche. Zugleich sieht man jetzt auch den Grund ein, weshalb die gravitirenden Massen, von denen das Potential V zu nehmen war, über die Druckfläche vertheilt sein mussten.

Das ist so etwa im grossen Ganzen der Gedankengang der Hertz'schen Untersuchung; natürlich sind dabei beide Körper ins Auge zu fassen und auf das gegenseitige Verhalten beider beziehen sich auch noch einige Grenzbedingungen, worauf ich aber hier nicht weiter eingehen will.

Die wichtigsten Resultate, zu denen Hertz dabei gelangte, sind folgende. Man denke sich im natürlichen Zustande, wenn beide Körper sich nur in einem Punkte berühren, in nächster Nachbarschaft des Berührungspunktes, alle zusammengehörigen Punkte beider Oberflächen aufgesucht, die einen constanten kleinen Abstand e in der Richtung der Z-Axe voneinander besitzen. Diese Punkte geben bei ihrer Projection auf die Berührungsebene eine Ellipse. Die Druckfläche ist dann auch eine Ellipse von denselben Axenrichtungen; dagegen ist das Verhältniss der Axen von dem der Ellipse $e = \text{const.}$ verschieden. Für die beiden Halbaxen a und b der Druckfläche findet Hertz

$$\left.\begin{aligned} a &= \mu \sqrt[3]{\frac{3P(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{8(\varrho_{11} + \varrho_{12} + \varrho_{21} + \varrho_{22})}} \\ b &= \nu \sqrt[3]{\frac{3P(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{8(\varrho_{11} + \varrho_{12} + \varrho_{21} + \varrho_{22})}} \end{aligned}\right\} . \qquad (376)$$

Die Zahlen-Coefficienten μ und ν sind nur von dem Axenverhältnisse der Ellipse $e = \text{const.}$ abhängig. Hertz gibt dafür eine Tabelle. Wenn die Ellipsen $e = \text{const.}$ zu Kreisen werden, ist $\mu = \nu = 1$ und die Druckfläche wird auch ein Kreis. P ist der Druck, mit dem beide Körper aufeinander gepresst werden; ϑ_1 und ϑ_2 sind Elasticitätsconstanten der beiden aufeinander gepressten Körper und zwar ist für jeden nach den in diesem Buche gebrauchten Bezeichnungen

$$\vartheta = \frac{4(m^2 - 1)}{m^2 E} = \frac{2(m - 1)}{m G}$$

zu setzen. Ferner bedeuten die ϱ die 4 Hauptkrümmungen beider Körper im natürlichen Zustande an der Berührungsstelle (also die reciproken Werthe der Hauptkrümmungshalbmesser).

Die Vertheilung des Normaldrucks σ_z über die Druckfläche wird durch die Formel

$$\sigma_z = \frac{3P}{2ab\pi}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \tag{377}$$

dargestellt. Am Rande der Druckfläche ist $\sigma_z = 0$ und nach der Mitte hin wächst es wie die Ordinaten eines über der Druckfläche construirten Ellipsoids. In der Mitte wird σ_z am grössten und zwar $1\frac{1}{2}$ mal so gross als im Durchschnitte für die ganze Fläche. Bezeichnet man den grössten Werth von σ_z mit σ_0, so wird speciell für kreisförmige Druckflächen

$$\sigma_0 = \frac{3}{2\pi}\sqrt[3]{P\left\{\frac{8(\varrho_{11} + \varrho_{12} + \varrho_{21} + \varrho_{22})}{3(\vartheta_1 + \vartheta_2)}\right\}^2} \tag{378}$$

und die Annäherung α, die beide Körper durch die Abplattung erfahren, wird

$$\alpha = \frac{3P(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{16a}. \tag{379}$$

Der Halbmesser der Druckfläche wächst proportional mit der dritten Wurzel des Druckes P und in demselben Maasse wächst auch die Beanspruchung des Materials; die Annäherung α wächst dagegen proportional mit der zweidrittelten Potenz von P.

Speciell wird für zwei Kugeln aus demselben Materiale mit den Halbmessern r_1 und r_2 nach Umrechnung der Elasticitätsconstanten ϑ auf E und mit $m = \frac{10}{3}$

$$a = 1{,}11\sqrt[3]{\frac{P}{E}\cdot\frac{r_1 r_2}{r_1 \pm r_2}}. \tag{380}$$

Das untere Vorzeichen im Nenner ist zu nehmen, wenn die eine Kugel eine Hohlkugel ist. Ferner wird

$$\sigma_0 = 0{,}388\sqrt[3]{PE^2\left(\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2}\right)^2}, \tag{381}$$

$$\alpha = 1{,}23\sqrt[3]{\frac{P^2}{E^2}\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2}}. \tag{382}$$

Praktisch wichtig ist namentlich der Fall, dass an Stelle der einen Kugel eine Platte tritt. Man braucht dann nur den betreffenden Halbmesser in den vorausgehenden Formeln unendlich gross zu setzen. Dadurch erhält man für eine Platte und eine Kugel vom Halbmesser r

$$a = 1{,}11 \sqrt[3]{\frac{Pr}{E}}, \tag{383}$$

$$\sigma_0 = 0{,}388 \sqrt[3]{\frac{PE^2}{r^2}}, \tag{384}$$

$$\alpha = 1{,}23 \sqrt[3]{\frac{P^2}{E^2 r}}. \tag{385}$$

Ferner erhält man für zwei rechtwinklig gekreuzte Cylinder von demselben Halbmesser r

$$\sigma_0 = 0{,}388 \sqrt[3]{\frac{PE^2}{r^2}}. \tag{386}$$

Praktisch wichtig ist ferner noch der Fall, dass sich zwei Cylinder von den Halbmessern r_1 und r_2 längs einer Erzeugenden berühren. Man muss sich die Cylinder unendlich lang denken. Die eine Halbaxe der Druckellipse wird dann auch unendlich gross und für die andere erhält man

$$a = 1{,}52 \sqrt{\frac{P'}{E} \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}}, \tag{387}$$

$$\sigma_0 = 0{,}418 \sqrt{P'E \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2}}. \tag{388}$$

Die Wurzeln sind hier Quadratwurzeln, worauf ich ausdrücklich aufmerksam mache; unter P' ist der Druck auf die Längeneinheit der Cylinder zu verstehen; P' hat daher die Dimension kg/cm.

Wenn einer der Cylinder durch eine Platte ersetzt wird (z. B. bei den Walzenlagern der Brückenträger) wird

$$a = 1{,}52 \sqrt{\frac{P'r}{E}} \tag{389}$$

$$\sigma_0 = 0{,}418 \sqrt{\frac{P'E}{r}}. \tag{390}$$

Vorausgesetzt wird dabei, dass die Platte hinreichend dick ist, so dass die Spannungen sich nahezu so vertheilen, als wenn die Dicke unendlich gross wäre.

§ 73. Die Härte der Körper, besonders der Metalle.

Der Begriff der Härte läuft neben den anderen Arten der Festigkeit ohne rechten Zusammenhang her; wenigstens war es so vor der Untersuchung, die Hertz darüber angestellt hat. Die Mineralogen prüften die Härte der Gesteine durch Ritzversuche und sie haben eine besondere Härtescala aufgestellt, in die die einzelnen Mineralien nach Ordnungsnummern eingereiht werden. Bei dieser Art der Prüfung und Eintheilung fehlt jede Uebersicht über den Zusammenhang der Härte mit den übrigen elastischen und Festigkeitseigenschaften der Körper. Von den Metallen wird der Begriff der Härte namentlich beim Stahle vielfach gebraucht. Man versteht dann unter der Härte im Allgemeinen den Widerstand gegen eine Bearbeitung durch schneidende Werkzeuge auf der Drehbank, der Hobelmaschine, der Bohrmaschine u. s. w. Da es sich gezeigt hat, dass diese Eigenschaft des Stahls besonders von dem Gehalte an Kohlenstoff (aber auch an Mangan, Chrom, Wolfram u. s. f.) abhängt, begnügt man sich häufig damit, die Härte des Stahls einfach durch Angabe des Kohlenstoffgehalts zu kennzeichnen.

Dieser Unsicherheit in der Feststellung des Begriffes der Härte hat Hertz durch seine Untersuchung abgeholfen. Er machte darauf aufmerksam, dass es sich bei der Härte immer um eine Festigkeitseigenschaft handelt, die sich bei der Berührung zweier Körper von gleicher oder verschiedener Art unter einem gewissen Drucke geltend macht. Wird unter einem bestimmten Drucke bei der Berührung ein bleibender Eindruck hervorgerufen, so entsteht ein Ritz oder überhaupt eine sich der Länge nach hinziehende Beschädigung, wenn man den einen Körper unter diesem Drucke über den anderen fortbewegt. Wenn man sich über die Eigenschaft der Härte Rechenschaft ablegen will, muss man daher zunächst den Spannungs-