Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

Lösung von Boussinesq (Gl. 367)

urn:nbn:de:hbz:466:1-84594

Diese Gleichung ist nun in der That für jedes z erfüllt, wenn man

$$n = \frac{P}{4\pi G} \tag{366}$$

setzt. Hiermit sind alle Constanten pqn den Grenzbedingungen entsprechend bestimmt.

Die ergänzten und vollständig durchgeprüften Verschiebungscomponenten $\xi\eta\zeta$ lauten daher jetzt

$$\left.\begin{aligned} \xi &= -\frac{m-2}{4\pi m G} P \frac{x}{r(z+r)} + \frac{P}{4\pi G}\frac{zx}{r^3}, \\ \eta &= -\frac{m-2}{4\pi m G} P \frac{y}{r(z+r)} + \frac{P}{4\pi G}\frac{zy}{r^3}, \\ \zeta &= \frac{2m-2}{4\pi m G} P \cdot \frac{1}{r} + \frac{P}{4\pi G}\frac{z^2}{r^3}. \end{aligned}\right\} \tag{367}$$

Zum Vergleiche dieser Ergebnisse mit der Erfahrung eignet sich am besten die Formel für ζ, bezogen auf Punkte in der Oberfläche, da die Messung der Einsenkungen der Oberfläche am leichtesten ausgeführt werden kann. Mit $z = 0$ verschwindet das zweite Glied des Ausdrucks für ζ und das erste lässt sich mit Rücksicht auf die Gl. (34)

$$G = \frac{mE}{2(m+1)}$$

in der etwas bequemeren Form

$$\zeta_0 = \frac{m^2-1}{m^2 \pi E} \cdot \frac{P}{r} \tag{368}$$

anschreiben. Man schliesst daraus, dass die Oberfläche in ein Umdrehungshyperboloid übergehen müsste, wenn der Erdboden das Hooke'sche Gesetz befolgte. Ich erwähnte indessen schon in § 38, wo ich Messungen mittheilte, die ich hierüber angestellt habe, dass diese Folgerung für den Erdboden nicht zutrifft.

Mit den Gleichungen (367) ist der ganze Zwangs- und Spannungszustand des Körpers gegeben. Man kann daran leicht weitere Folgerungen über die Spannungsvertheilung knüpfen. Ich will mich jetzt mit ausführlicheren Rechnungen hierüber nicht aufhalten, sondern nur noch einige Resultate angeben, die man sich, wenn es gewünscht wird, leicht selbst ableiten kann.

Es genügt, wenn man den Spannungszustand für alle Punkte untersucht, die auf irgend einer durch die Z-Axe gelegten Ebene enthalten sind, da für alle anderen Ebenen dieser Art dasselbe gilt. Wir wählen dazu die XZ-Ebene. Ausserdem ziehe man eine horizontale Ebene $z = \text{const.}$, die die XZ-Ebene in einer wagrechten Linie schneidet. Für alle Punkte dieser Linie wird (wie übrigens schon aus Symmetriegründen zu schliessen ist) τ_{zy} zu Null. Die Spannungscomponenten σ_z und τ_{zx} setze man zur resultirenden Spannung p für den wagrechten Schnitt zusammen. Man findet dann, dass die Richtung von p durch den Ursprung geht und der Grösse nach durch die Formel

$$p = \frac{3\,P\,z^2}{2\,\pi\,r^4} \tag{369}$$

dargestellt wird. Ferner denke man sich einen Kreis von beliebigem Halbmesser durch den Ursprung gelegt, dessen Mittelpunkt auf der Z-Axe enthalten ist. Für alle Punkte dieses Kreises nimmt dann, wie sich leicht zeigen lässt, p denselben Werth an. — Damit hat man schon ein ziemlich deutliches Bild der Spannungsvertheilung gewonnen, namentlich wenn noch hinzugefügt wird, dass p umgekehrt proportional dem Quadrate des Halbmessers dieses Kreises ist.

§ 72. Fortsetzung; Theorie von Hertz.

Die Hertz'sche Theorie bewegt sich in ganz ähnlichen Bahnen, wie die von Boussinesq, macht aber dabei noch etwas mehr Rechnungen erforderlich. Aus diesem Grunde habe ich mich hier für eine etwas ausführlichere Behandlung der Boussinesq'schen Theorie entschieden, während ich mich darauf beschränken werde, von der Hertz'schen nur die wichtigsten Resultate mitzutheilen. Es kommt mir hier eigentlich nur darauf an, eine ungefähre Vorstellung von dem Gedankengange solcher Betrachtungen zu geben, während für ein eingehenderes Studium auf die Originalarbeiten oder auch auf das schon in