Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

Druckfläche.

urn:nbn:de:hbz:466:1-84594

Materialfehler die Widerstandsfähigkeit gegen Stösse bedeutend herabsetzen, während sie sich bei einer ruhenden Belastung verhältnissmässig nur wenig bemerklich machen.

Aus diesem Beispiele lässt sich zugleich die allgemeine Lehre entnehmen, dass bei dehnbaren Stoffen die Tragfähigkeit durch die Ausgleichung der Spannungen infolge der bleibenden Formänderungen immer dann beträchtlich erhöht werden kann, wenn eine Abänderung des innerhalb des rein elastischen Theiles der Formänderung auftretenden Spannungszustandes überhaupt zu Gunsten der Tragfähigkeit möglich ist. Schon vorher war an verschiedenen Stellen von diesem Umstande die Rede.

§ 71. Theorieen von Boussinesq und von Hertz.

Zwei elastische Körper, für die das Hooke'sche Gesetz gilt, mögen sich im natürlichen Zustande in einem Punkte ihrer Oberflächen, die irgendwie gekrümmt sein können oder auch längs einer Erzeugenden, wenn z. B. die Oberflächen cylinderförmig sind, berühren. Wenn hierauf beide mit einem gewissen Drucke aufeinandergepresst werden, tritt eine Abplattung ein und die Körper berühren sich jetzt in einer Fläche, in der sich jener Druck überträgt und die deshalb als die Druckfläche bezeichnet wird. Es entsteht nun die Aufgabe, den Formänderungs- und den Spannungszustand beider Körper unter den beschriebenen Umständen näher zu untersuchen.

Mit dieser Aufgabe beschäftigt sich die Theorie von Hertz und nahe verwandt damit ist die Theorie von Boussinesq, von der ich zunächst einen kurzen Abriss geben will, ohne jedoch tiefer darauf einzugehen, als es dem Plane dieses Buches entspricht.

Man denke sich einen Körper, der nach oben hin durch eine horizontale Ebene begrenzt ist und der so grosse Abmessungen hat, dass er nach allen übrigen Seiten hin als unbegrenzt angenommen werden kann. Wenn der Erdboden dem Hooke'schen Gesetze gehorchte, könnte man sich die ganze

Erde unter diesem Körper vorstellen. Obschon dies nun freilich nach Versuchen, die ich nach dieser Richtung hin anstellte, nicht zutrifft, will ich doch der kürzeren Ausdrucksweise wegen den Körper als die Erde bezeichnen. An irgend einer Stelle dieses Erdbodens sei eine Last P aufgebracht. Die Oberfläche des Erdbodens senkt sich unter dieser Last etwas ein und wir wollen nun untersuchen, in welchen Zwangszustand die Erde in der Umgebung gerathen müsste, wenn das Hooke'sche Gesetz giltig wäre. Den Ursprung des Coordinatensystems lasse ich mit dem Angriffspunkte der Last P zusammenfallen und die Z-Axe soll senkrecht nach abwärts gehen. Ich sehe davon ab, das Coordinatensystem auf dem bewegten Körper selbst festzulegen, sondern denke mir es in absoluter Ruhe. Anstatt dessen kann ich auch sagen, dass sich die entfernter liegenden Theile der Erde unter der Belastung nicht mehr merklich gegen das Coordinatensystem verschieben sollen, oder dass das Coordinatensystem an die Erde im Unendlichen fest geheftet ist.

Die X- und die Y-Axe laufen horizontal und fallen im ursprünglichen Zustande in die Erdoberfläche. Die Entfernung irgend eines Punktes der Erde vom Coordinatenursprunge sei mit r bezeichnet, so dass also

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \tag{343}$$

ist. Für $r = \infty$ müssen dann nach der Wahl des Coordinatensystems die elastischen Verschiebungen $\xi \eta \zeta$ verschwinden.

Diese Verschiebungen selbst müssen zunächst den allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen entsprechen, die wir in der Form der Gl. (304) nochmals anschreiben wollen:

$$\nabla^2 \xi + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial x} = 0,$$

$$\nabla^2 \eta + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial y} = 0,$$

$$\nabla^2 \zeta + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial z} = 0,$$

$$e = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}.$$

Die Definitionsgleichung für die specifische Volumenänderung e habe ich am Schlusse noch einmal dazu gefügt.

Wenn p, q, n drei Constanten bedeuten, deren Werthe später passend zu bestimmen sind, gibt das System der Verschiebungen

$$\left.\begin{aligned} \xi &= -p\frac{x}{r(z+r)} + n\frac{zx}{r^3}, \\ \eta &= -p\frac{y}{r(z+r)} + n\frac{zy}{r^3}, \\ \zeta &= q\cdot\frac{1}{r} + n\frac{z^2}{r^3} \end{aligned}\right\} \tag{344}$$

wie ich jetzt zeigen will, einen möglichen, also einen mit den allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen verträglichen Zwangszustand an. Dazu sind einige etwas langwierige Rechnungen vorzunehmen, die aber an sich ganz einfach sind und nach allgemein bekannten Regeln ausgeführt werden können. Zunächst bilde ich

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = -p\left(\frac{1}{rz+r^2} - \frac{x}{(rz+r^2)^2}(z+2r)\frac{\partial r}{\partial x}\right) + n\left(\frac{z}{r^3} - 3\frac{zx}{r^4}\frac{\partial r}{\partial x}\right).$$

Um den partiellen Differentialquotienten von r nach x zu ermitteln, differentiire ich Gl. (343) partiell nach x und erhalte

$$2r\frac{\partial r}{\partial x} = 2x, \quad \text{also} \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}.$$

Setzt man dies in die vorausgehende Gleichung ein und zieht zusammen, so erhält man

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = -p\cdot\frac{r^2(z+r) - x^2(z+2r)}{(z+r)^2r^3} + n\frac{z(r^2-3x^2)}{r^5}. \tag{345}$$

Wir brauchen nur x mit y zu vertauschen, um sofort

$$\frac{\partial\eta}{\partial y} = -p\frac{r^2(z+r) - y^2(z+2r)}{(z+r)^2r^3} + n\frac{z(r^2-3y^2)}{r^5} \tag{346}$$

zu erhalten. Ebenso bilden wir durch Differentiiren

$$\frac{\partial\zeta}{\partial z} = -q\frac{z}{r^3} + n\frac{z(2r^2-3z^2)}{r^5}. \tag{347}$$

Durch Addition der drei Werthe finden wir e. Vereinigt man zunächst die drei Glieder mit dem Faktor n, so erhält man mit Rücksicht auf Gl. (343)

$$n \frac{z}{r^3}.$$

Die beiden Glieder mit dem Faktor p dagegen liefern

$$-p \frac{2r^2(z+r)-(r^2-z^2)(z+2r)}{(z+r)^2 r^3}$$

und dies vereinfacht sich nach Ausmultipliciren im Zähler, Zusammenziehen und Herausheben von z zu

$$-p \frac{z(r^2+2rz+z^2)}{(z+r)^2 r^3}$$

oder nach Kürzen mit $(z+r)^2$ zu

$$-p \frac{z}{r^3}.$$

Im Ganzen haben wir daher für e

$$e = (n-p-q)\frac{z}{r^3}. \tag{348}$$

Wir müssen jetzt $\nabla^2 \xi$ bilden. Die unmittelbare Ausführung der Differentiationen würde zu allzulangen und daher schwer zu übersehenden Formeln führen. Wir wollen uns desshalb hierzu einiger einfacher Hülfssätze bedienen. Wenn A und B zwei beliebige Functionen von xyz sind, so ist

$$\frac{\partial}{\partial x}(AB) = A\frac{\partial B}{\partial x} + B\frac{\partial A}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(AB) = A\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + 2\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial x} + B\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}.$$

Die gleichen Formeln gelten auch für die Differentiationen nach y und z. Fasst man daher die drei zweiten Differentialquotienten zusammen, so findet man

$$\nabla^2(AB) = A\nabla^2 B + B\nabla^2 A + 2\left(\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z}\frac{\partial B}{\partial z}\right). \tag{349}$$

Ferner sei die Differential-Operation ∇^2 an einem Bruche $\frac{1}{A}$ vorgenommen. Man hat

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{A}\right) = -\frac{1}{A^2}\frac{\partial A}{\partial x},$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{A}\right) = -\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{2}{A^3}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2$$

und daher nach Zusammenfassen der Resultate für die Differentiationen nach allen drei Axenrichtungen

$$\nabla^2\left(\frac{1}{A}\right) = -\frac{1}{A^2}\nabla^2 A + \frac{2}{A^3}\left(\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)^2\right). \tag{350}$$

Jetzt soll die Operation ∇^2 an r, das durch Gl. (343) definirt ist, ausgeführt werden. Wir fanden schon

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$$

und erhalten daraus durch nochmalige Differentiation

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{1}{r} - \frac{x}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{r^2 - x^2}{r^3}$$

und ähnlich für die beiden anderen Axenrichtungen. Im Ganzen wird daher mit Rücksicht auf Gl. (343)

$$\nabla^2 r = \frac{2}{r}. \tag{351}$$

Setzt man in Gl. (350) r an Stelle von A, so findet man nach einer kleinen Umrechnung

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = 0. \tag{352}$$

Dies ist, nebenbei bemerkt, eine der bekanntesten Gleichungen der Potentialtheorie. — Wir gehen jetzt näher auf unser Ziel los und bilden

$$\nabla^2(z + r) = \nabla^2 z + \nabla^2 r = \frac{2}{r}$$

und auf Grund von Gl. (350)

$$\nabla^2\left(\frac{1}{z+r}\right) = -\frac{1}{(z+r)^2}\cdot\frac{2}{r} + \frac{2}{(z+r)^3}\left(\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{r+z}{r}\right)^2\right),$$

was sich nach einfacher Umformung vereinfacht zu

$$\nabla^2\left(\frac{1}{z+r}\right) = \frac{2}{r(z+r)^2}. \tag{353}$$

Ebenso bilden wir nach Gl. (349), mit Berücksichtigung von Gl. (352)

$$\nabla^2\left(\frac{x}{r}\right) = \nabla^2\left(x \cdot \frac{1}{r}\right) = -2\,\frac{x}{r^3}. \tag{354}$$

Nach diesen Vorbereitungen können wir ohne zu grosse Weitläufigkeiten daran gehen, die Operation ∇^2 an ξ auszuführen. Wir finden zunächst für das erste Glied nach Gl. (349)

$$\nabla^2 \frac{x}{r(z+r)} = \frac{x}{r}\cdot\nabla^2\left(\frac{1}{z+r}\right) + \frac{1}{z+r}\cdot\nabla^2\frac{x}{r} + 2\left\{-\left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\right)\frac{x}{r(z+r)^2}\right.$$
$$\left. + \frac{xy}{r^3}\cdot\frac{y}{r(z+r)^2} + \frac{xz}{r^3}\cdot\frac{r+z}{r(z+r)^2}\right\}.$$

Mit Berücksichtigung der Gleichungen (353) und (354) vereinfacht sich dies zu

$$\nabla^2 \frac{x}{r(z+r)} = \frac{2x}{r^2(r+z)^2} - \frac{2x}{r^3(r+z)} + 2x\frac{-r^2+x^2+y^2+z^2+rz}{r^4(z+r)^2}$$
$$= 2x\frac{r^2 - r(z+r) + rz}{r^4(z+r)^2}.$$

Die Glieder im Zähler heben sich gegeneinander weg und daher ist

$$\nabla^2 \frac{x}{r(z+r)} = 0. \tag{355}$$

Wir können daraus sofort schliessen, dass auch

$$\nabla^2 \frac{y}{r(z+r)} = 0 \tag{356}$$

sein muss.

Jetzt gehen wir dazu über, die Operation ∇^2 an dem zweiten Gliede des für ξ aufgestellten Ausdrucks auszuführen. Wir finden zunächst

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r^3}\right) = -3\frac{x}{r^5},$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r^3}\right) = -\frac{3}{r^5} + 15\frac{x^2}{r^7}$$

und durch Zusammenfassen der drei Differentialquotienten

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r^3}\right) = \frac{6}{r^5}. \tag{357}$$

Da $\nabla^2 zx = 0$ ist, erhalten wir nach Gl. (349)

$$\nabla^2 \frac{zx}{r^3} = \frac{6xz}{r^5} - 2\left(z\frac{3x}{r^5} + x\frac{3z}{r^5}\right)$$

oder

$$\nabla^2 \frac{zx}{r^3} = -\frac{6xz}{r^5}. \tag{358}$$

Jetzt endlich können wir dazu übergehen, die Werthe für die Verschiebungen in die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen einzusetzen, um uns davon zu überzeugen, ob diese dadurch befriedigt werden. Für den Differentialquotienten von e nach x hat man nach Gl. (348)

$$\frac{\partial e}{\partial x} = -3(n - p - q)\frac{zx}{r^5}.$$

Die erste der allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen

$$\nabla^2 \xi + \frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial x} = 0$$

wird nun in der That identisch befriedigt, wenn wir den soeben angegebenen Werth von $\frac{\partial e}{\partial x}$ und ausserdem den aus den vorausgehenden Betrachtungen abgeleiteten Werth

$$\nabla^2 \xi = -6n\frac{zx}{r^5}$$

einsetzen, falls wir die Constanten pqn so wählen, dass sie die Bedingungsgleichung

$$2n + \frac{m}{m-2}(n - p - q) = 0 \tag{359}$$

erfüllen. Die Betrachtung der zweiten Gleichgewichtsbedingung

$$\nabla^2 \eta + \frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial y} = 0$$

liefert nichts Neues, da x und y bezw. ξ und η ganz symmetrisch in allen Formeln auftreten und daher überall miteinander vertauscht werden können; die Erfüllung dieser Gleichung ist daher ebenfalls an die Bedingungsgleichung (359) gebunden.

Wir bilden jetzt $\nabla^2 \zeta$. Das erste Glied davon verschwindet nach Gl. (352). Beim zweiten erhalten wir nach Gl. (349)

$$\nabla^2 \frac{z^2}{r^3} = z^2 \nabla^2 \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^3} \cdot 2 - 4z \cdot \frac{3z}{r^5}$$

oder mit Rücksicht auf Gl. (357)

$$\nabla^2 \frac{z^2}{r^3} = \frac{2r^2 - 6z^2}{r^5}. \tag{360}$$

Damit wird

$$\nabla^2 \zeta = n \frac{2r^2 - 6z^2}{r^5}.$$

Ferner ist nach Gl. (348)

$$\frac{\partial e}{\partial z} = (n - p - q)\left(\frac{1}{r^3} - 3\frac{z^2}{r^5}\right)$$

und wenn wir diese Werthe in die dritte der allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen

$$\nabla^2 \zeta + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial z} = 0$$

einsetzen, finden wir, dass diese ebenfalls identisch erfüllt wird, falls nur zwischen den Coefficienten pqn die Bedingungsgleichung (359) besteht.

Es ist also jetzt nach diesen mühsamen Rechnungen in der That nachgewiesen, dass das System der Verschiebungen $\xi\eta\zeta$ in den Gl. (344) einen möglichen Zwangszustand darstellt. Es muss jetzt noch untersucht werden, ob es zugleich jener ist, der den Grenzbedingungen unserer Aufgabe entspricht. Dazu gehört vor allen Dingen, dass die wagrechte Erdoberfläche sonst überall, mit Ausnahme der Angriffsstelle der Last P, frei ist, dass also für $z = 0$ die Spannungen σ_z mit Ausnahme der Nachbarschaft des Ursprungs des Coordinatensystems, verschwinden müssen, während zugleich die Spannungen τ_{zx} und τ_{zy} an der ganzen Oberfläche ohne Ausnahme überall gleich Null sein müssen. Wir prüfen zunächst die letzte Bedingung. Nach den Gl. (288) ist

$$\tau_{zx} = G\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right),$$

$$\tau_{zy} = G\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right).$$

Für die hierin vorkommenden Differentialquotienten findet man nach den Gleichungen (344)

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} = p\frac{x}{r^2(z+r)^2}\left(r + \frac{z^2}{r} + 2z\right) + \frac{nx}{r^3} - 3n\frac{z^2 x}{r^5}$$

$$= p\frac{x}{r^3} + nx\frac{r^2 - 3z^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = -q\frac{x}{r^3} - 3n\frac{z^2 x}{r^5},$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial z} = p\frac{y}{r^3} + ny\frac{r^2 - 3z^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y} = -q\frac{y}{r^3} - 3n\frac{z^2 y}{r^5}.$$

Setzt man diese Werthe ein, so wird

$$\left.\begin{aligned} \tau_{zx} &= G\frac{x}{r^3}\left\{p + n - q - 6n\frac{z^2}{r^2}\right\}, \\ \tau_{zy} &= G\frac{y}{r^3}\left\{p + n - q - 6n\frac{z^2}{r^2}\right\}. \end{aligned}\right\} \qquad (361)$$

Für $z = 0$ sollen diese Spannungscomponenten überall verschwinden. Daher muss zwischen den Constanten pqn die fernere Bedingungsgleichung

$$p + n - q = 0 \qquad (362)$$

erfüllt sein. Wenn diese besteht, ist aber die fragliche Grenzbedingung in der That überall befriedigt.

Wir kommen jetzt zu der Normalspannung σ_z. Für diese hat man nach den Gleichungen (292)

$$\sigma_z = 2G\left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{e}{m-2}\right).$$

Der hierin vorkommende Differentialquotient ist nach den Gl. (344)

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} = -q\frac{z}{r^3} + n\left(\frac{2z}{r^3} - \frac{3z^3}{r^5}\right).$$

Setzt man ferner noch e aus Gl. (348) ein, so wird

$$\sigma_z = 2G\frac{z}{r^3}\left\{-q + 2n + \frac{n-p-q}{m-2} - 3n\frac{z^2}{r^2}\right\}.$$

Dieser Ausdruck wird von selbst für $z = 0$ überall zu Null, mit Ausnahme der unmittelbaren Nachbarschaft des Ursprungs. Dort ist nämlich zugleich $r = 0$ und σ_z nimmt die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an. Mit Hilfe der Gl. (359) und (362), die zwischen den Coefficienten pqn bestehen müssen, kann man den Ausdruck übrigens noch vereinfachen. Die Auflösung dieser Gleichungen

$$2n + \frac{m}{m-2}(n - p - q) = 0,$$

$$p + n - q = 0$$

nach p und q liefert nämlich

$$p = \frac{m-2}{m}n; \quad q = \frac{2m-2}{m}n. \tag{363}$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung für σ_z ein, so geht diese über in

$$\sigma_z = -6Gn\frac{z^3}{r^5}, \tag{364}$$

da sich die anderen Glieder alle gegeneinander wegheben.

Die Bestimmung der Vertheilung der Druckkräfte σ_z innerhalb der Druckfläche selbst können wir auf Grund dieses Ausdrucks nicht versuchen, da die ganze Betrachtung von vornherein darauf verzichtete, die Erscheinungen in nächster Nähe der Angriffsstelle der Belastung darzustellen. Sonst hätte der Ansatz (344) für die Verschiebungscomponenten überhaupt nicht in solcher Art gemacht werden dürfen, da er schon die Verschiebungscomponenten im Ursprunge in der Form $\frac{0}{0}$ ergibt. Die Untersuchung lässt es vielmehr dahingestellt, wie sich die Verhältnisse an der Angriffsstelle der Last in Wirklichkeit gestalten und beschränkt sich auf die Behandlung des Zwangszustandes an den weiter ab liegenden Stellen. Dabei verlässt man sich darauf, dass es für diese ferner liegenden Stellen ohnehin ganz gleichgültig ist, welche genauere Art der Lastvertheilung an der Angriffsstelle vorliegt, ganz so wie es auch schon bei der Saint-Vénant'schen Theorie geschehen war.

Dagegen bleibt jetzt noch die Constante n zu bestimmen in der Art, dass jedenfalls der ganze übertragene Druck gleich P ist. Wir führen dies, um nicht mit den Verhältnissen an der Druckfläche in Berührung zu kommen, so aus, dass wir eine horizontale Ebene im festen Abstande z vom Ursprunge ziehen und den ganzen Druck σ_z, der durch diese Ebene übertragen wird, gleich P setzen. Denn offenbar muss, wenn vom Eigengewichte abgesehen wird, derselbe Druck P von jeder horizontalen Schicht auf die folgende weiter geleitet werden.

In dieser horizontalen Ebene sei ein Kreis vom Halbmesser ϱ gezogen, dessen Mittelpunkt auf der Z-Axe liegt. Dann ist

$$\varrho^2 = r^2 - z^2 \tag{365}$$

und an allen Stellen dieses Kreises hat σ_z nach Gl. (364) denselben Werth. In einem ringförmigen Streifen, der von den Radien ϱ und $\varrho + d\varrho$ eingeschlossen wird, überträgt sich daher der Druck

$$6\,Gn\frac{z^3}{(\varrho^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\cdot 2\pi\varrho\, d\varrho$$

und das Integral dieses Ausdrucks von $\varrho = 0$ bis $\varrho = \infty$ muss für jedes constante z gleich P sein. Von der Berücksichtigung des negativen Vorzeichens in Gl. (364) werde jetzt abgesehen; es drückt nur aus, dass σ_z eine Druckspannung bedeutet, wenn n positiv ist. Die Integration ist leicht auszuführen; man hat

$$\int\frac{2\varrho\, d\varrho}{(\varrho^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} = -\frac{2}{3}(\varrho^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

Wenn man die Grenzen einsetzt, wird daher

$$\int_0^\infty\frac{2\varrho\, d\varrho}{(\varrho^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{2}{3z^3}$$

und die Bedingungsgleichung für das Gleichgewicht der Spannungen σ_z mit P lautet

$$6\,Gnz^3\pi\cdot\frac{2}{3z^3} = P.$$

Diese Gleichung ist nun in der That für jedes z erfüllt, wenn man

$$n = \frac{P}{4\pi G} \tag{366}$$

setzt. Hiermit sind alle Constanten pqn den Grenzbedingungen entsprechend bestimmt.

Die ergänzten und vollständig durchgeprüften Verschiebungscomponenten $\xi\eta\zeta$ lauten daher jetzt

$$\left.\begin{aligned} \xi &= -\frac{m-2}{4\pi m G} P \frac{x}{r(z+r)} + \frac{P}{4\pi G}\frac{zx}{r^3}, \\ \eta &= -\frac{m-2}{4\pi m G} P \frac{y}{r(z+r)} + \frac{P}{4\pi G}\frac{zy}{r^3}, \\ \zeta &= \frac{2m-2}{4\pi m G} P \cdot \frac{1}{r} + \frac{P}{4\pi G}\frac{z^2}{r^3}. \end{aligned}\right\} \tag{367}$$

Zum Vergleiche dieser Ergebnisse mit der Erfahrung eignet sich am besten die Formel für ζ, bezogen auf Punkte in der Oberfläche, da die Messung der Einsenkungen der Oberfläche am leichtesten ausgeführt werden kann. Mit $z = 0$ verschwindet das zweite Glied des Ausdrucks für ζ und das erste lässt sich mit Rücksicht auf die Gl. (34)

$$G = \frac{mE}{2(m+1)}$$

in der etwas bequemeren Form

$$\zeta_0 = \frac{m^2-1}{m^2\pi E} \cdot \frac{P}{r} \tag{368}$$

anschreiben. Man schliesst daraus, dass die Oberfläche in ein Umdrehungshyperboloid übergehen müsste, wenn der Erdboden das Hooke'sche Gesetz befolgte. Ich erwähnte indessen schon in § 38, wo ich Messungen mittheilte, die ich hierüber angestellt habe, dass diese Folgerung für den Erdboden nicht zutrifft.

Mit den Gleichungen (367) ist der ganze Zwangs- und Spannungszustand des Körpers gegeben. Man kann daran leicht weitere Folgerungen über die Spannungsvertheilung knüpfen. Ich will mich jetzt mit ausführlicheren Rechnungen hierüber nicht aufhalten, sondern nur noch einige Resultate