Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

§. 70. Hydrodynamisches Gleichniss.

urn:nbn:de:hbz:466:1-84594

in praktisch vorkommenden Fällen nicht zutreffen. Man muss sich aber dann an die Auseinandersetzungen in § 67 erinnern, nach denen es für solche Stellen, die weit genug vom Lastangriffe entfernt liegen, ziemlich gleichgültig ist, auf welche besondere Art die Last angebracht ist.

Wenn wir das Resultat, zu dem wir jetzt gelangt sind, mit der früheren Untersuchung über die Verdrehungsfestigkeit der elliptischen Welle vergleichen, finden wir, dass die damals hypothetisch angesetzten Gleichungen (233), S. 346

$$\tau_{xy} = ka^2 z; \quad \tau_{xz} = -kb^2 y$$

der Form nach vollständig mit den Gl. (339) übereinstimmen. Jener willkürliche Ansatz hat sich daher bei der eingehenderen Untersuchung jetzt als genau richtig erwiesen. Es ist daher nicht nöthig, hier noch weitere Folgerungen aus den Gl. (339) zu ziehen; vielmehr genügt es, auf die früheren Darlegungen im neunten Abschnitte zu verweisen.

Nur eine Bemerkung möge hier noch Platz finden. Gl. (336) ist zugleich die Gleichung der krummen Fläche, in die der vormals ebene Querschnitt durch die Verdrehung übergeht. Das ist aber die Gleichung eines hyperbolischen Paraboloides. Denkt man sich, nachdem die Verwindung erfolgt ist, von Neuem eine Anzahl ebener Schnitte senkrecht zur Axe gelegt, so schneiden diese die krummen Flächen, in die die vorher ebenen Querschnitte übergegangen sind, in gleichseitigen Hyperbeln; Schnitte, die durch die Axe gelegt sind, ergeben Parabeln.

§ 70. Hydrodynamisches Gleichniss.

In letzter Linie interessirt uns bei dem Torsionsprobleme eigentlich doch nur die Vertheilung der Schubspannungen über den Querschnitt. Es ist daher nützlich, diese Frage nach allen Seiten hin zu beleuchten und die nahe Verwandtschaft, die zwischen unserer Aufgabe und einer Aufgabe der Hydrodynamik besteht, wird sich dazu recht nützlich erweisen.

Man denke sich nämlich, von einem Punkte des Querschnittes ausgehend, eine Linie gezogen, die in der Richtung der resultirenden Schubspannung τ immer weiter verlängert wird. Alle Linien, die sich in dieser Weise ziehen lassen, wollen wir uns in den Querschnitt eingetragen denken, so dass durch jeden Punkt eine davon geht. Der einfacheren Bezeichnung wegen sollen diese Linien die Spannungslinien und die Gesammtheit der Linien, die den ganzen Querschnitt ausfüllen, das Spannungsfeld genannt werden. Von solchen Constructionen macht man oft Gebrauch, um sich über die Vertheilung einer gerichteten Grösse von irgend einer Art in einem gegebenen Gebiete Klarheit zu verschaffen. Am meisten bekannt ist dieses Verfahren in der Lehre vom Magnetismus, wo es sich heute schon bis in den elementaren Unterricht hinein festgewurzelt hat. Beim Magnetismus bezeichnet man die in dieser Weise gezogenen Linien als Kraftlinien. Unsere Spannungslinien dienen demselben Zwecke, wie diese. — Immer, wenn man von dieser Veranschaulichung Gebrauch macht, ist es nützlich, sich noch eines damit zusammenhängenden Bildes zu erinnern. Man kann sich nämlich eine Flüssigkeit vorstellen, die überall in der Richtung der Kraftlinien, oder hier der Spannungslinien strömt, so dass zugleich die Geschwindigkeit der Strömung überall proportional der Grösse der Kraft oder der Spannung ist. Diese Flüssigkeitsbewegung ist ebenfalls sehr geeignet, ein anschauliches Bild von dem Felde zu entwerfen, mit dem man es gerade zu thun hat und in der Lehre vom Magnetismus spielt in der That der daraus hervorgegangene Begriff des „Kraftflusses“ eine grosse Rolle.

Wir wollen jetzt sehen, wie wir die allgemeinen Bedingungsgleichungen, denen unsere Aufgabe unterworfen ist, umformen müssen, um sie der neu gewählten Darstellungsweise anzupassen. Am einfachsten gelingt dies mit der Grenzbedingung, die durch Gl. (333) ausgesprochen war. Wir können sie jetzt einfach dahin in Worte fassen, dass die Flüssigkeitsströmung am Umfange überall in der Richtung der Tangente erfolgen muss, d. h. gerade so wie eine Flüssigkeitsströmung ohnehin erfolgt, wenn sie rings von festen Wänden eingeschlossen ist.

Wir hatten ferner

$$\left.\begin{aligned} \tau_{xy} &= G\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + cz\right), \\ \tau_{xz} &= G\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} - cy\right). \end{aligned}\right\} \qquad (340)$$

Differentiirt man die erste dieser Gleichungen nach y und die zweite nach z und addirt, so erhält man

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = G\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}\right).$$

Die allgemeine Gleichgewichtsbedingung wurde für das Torsionsproblem durch Gl. (327) ausgesprochen und wir sehen jetzt auch, wie wir diese Bedingung bei der hydrodynamischen Darstellung zum Ausdrucke bringen müssen. Nach Gl. (327) verschwindet nämlich die rechte Seite der vorigen Gleichung und man hat daher auch

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \qquad (341)$$

als Ersatz für Gl. (327).

Bezeichnet man die Geschwindigkeitscomponenten einer Flüssigkeitsströmung mit uvw, so muss hier $u = 0$ sein und v und w sind proportional mit τ_{xy} und τ_{xz}; daher muss für die zur Abbildung des Torsionsproblems gewählte Flüssigkeitsbewegung nach (341) auch

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad (341^a)$$

sein. Das erste Glied ist nur der Vollständigkeit wegen beigefügt, obschon es für sich verschwindet. Der Ausdruck, der hier auf der linken Seite steht, gibt an, wie viel Flüssigkeit in der Zeiteinheit mehr aus der Volumeneinheit ausströmt, als einströmt.*) Dieser Ausdruck ist gleich Null, d. h. die Flüssigkeit bewegt sich so wie eine incompressible Flüssigkeit. Gl. (341) kann daher dahin gedeutet werden, dass eine gewöhnliche Wasserströmung der Abbildung des hier fraglichen

*) Siehe Band IV, Gl. (206).

Falles gerecht wird, ohne dass man Quellen oder Sickerstellen annehmen müsste, um den Fluss in dieser Form zu ermöglichen.

Damit allein sind die Bedingungen, denen die Wasserströmung unterworfen ist, aber noch nicht erschöpft. Man differentiire die erste der Gl. (340) nach z und die zweite nach y und subtrahire beide hierauf voneinander. Dadurch erhält man

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} = -2Gc. \tag{342}$$

Die linke Seite dieser Gleichung hat eine besondere Bedeutung, die in der Hydrodynamik (Band IV, § 39) eingehender behandelt werden wird. Hier begnüge ich mich damit, zu erwähnen, dass die drei Grössen

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

als die Wirbelcomponenten der Flüssigkeitsbewegung bezeichnet werden. Die beiden letzten, die sich auf die Y- und Z-Axe beziehen, sind bei unserer Flüssigkeitsbewegung gleich Null. Der Wirbel um die zur X-Axe parallelen Wirbellinien wird dagegen durch die linke Seite von Gl. (342) dargestellt und wir erkennen aus dieser Gleichung, dass die Flüssigkeit an allen Stellen mit derselben Stärke $2Gc$ wirbelt.

Hiermit ist die Flüssigkeitsbewegung vollständig beschrieben; nur auf eine einzige Art ist es nämlich möglich, dass die Wirbelstärke überall einen gegebenen constanten Werth hat, wenn die incompressible Flüssigkeit in dem durch den Querschnitt angegebenen Raume stetig herumfliessen soll und dabei rings von festen Wänden eingeschlossen ist.

Die Vorstellung unserer Aufgabe unter diesem Bilde kann nun insofern von Nutzen sein, als dadurch gewisse Schätzungen oder auch genaue Rechnungen nach den Lehren der Hydrodynamik erleichtert werden. Ich möchte hier besonders auf einen Aufsatz von Herrn R. Bredt in der Zeitschr. des Vereins deutscher Ingenieure 1896, Nr. 28, aufmerksam machen, der eine gute Anleitung dafür gibt, wie man solche Schätzungen für I-Profile u. dergl. ausführen kann. Mit der Behauptung, dass Gl. (342) vor ihm noch nicht bekannt gewesen wäre, irrte sich Herr Bredt freilich und ich musste ihm daher entgegentreten; diese ganze hydrodynamische Betrachtung, wie ich sie hier vorgeführt habe, ist schon längst von Thomson und Tait in ihrer „Natural Philosophy" veröffentlicht worden. Um so lieber erkenne ich aber an, dass der angeführte Bredt'sche Aufsatz eine sehr tüchtige Leistung bildet und alle Beachtung verdient. — Ferner möchte ich bei dieser Gelegenheit auch auf zwei umfangreiche Abhandlungen von Herrn B. Schulz in der Z. f. Arch. u. Ingenieurwesen 1899 hinweisen, die zwar mit der hier besprochenen Darstellungsweise nichts zu thun haben, aber ebenfalls eine gute Anleitung für die Aufstellung von Näherungsformeln für verschiedene Querschnittsformen geben.

Zu einem besonders bemerkenswerthen Resultate gelangt man durch die hydrodynamische Betrachtung, wenn man sie auf den Fall anwendet, dass irgendwo im Querschnitte ein kleiner Sprung (Gussfehler o. dgl.) auftritt. Wir wollen annehmen, dass dieser Fehler durch ein kleines kreisförmiges Loch im Querschnitte dargestellt werden kann. Dadurch wird das Spannungsfeld nur in der Umgebung des Loches merklich geändert; die Spannungslinien können jetzt nicht mehr durch die Fläche des Loches weiter gehen, sondern müssen ausbiegen und um den Rand des Loches herumfliessen. Man sieht schon ohne Weiteres ein, dass an den Rändern des Loches die Geschwindigkeit dadurch gesteigert werden muss. Diese Geschwindigkeit entspricht aber der Spannung und damit der Beanspruchung des Materials in der verdrehten Welle. In der That kann man auch quantitativ den Einfluss des Sprunges leicht nachweisen; es zeigt sich, dass die Spannung am Rande dadurch gerade auf das Doppelte erhöht wird.*) Auf die Durchführung der Rechnung verzichte ich hier, da sie auf hydrodynamischen Betrachtungen beruht, die ich hier noch nicht als bekannt voraussetzen kann. Ueberhaupt bin ich aus diesem Grunde nur flüchtig auf die hier besprochenen Erscheinungen eingegangen.

*) Man beachte jedoch die Bemerkungen am Schlusse von § 70[b], S. 457, erster Absatz, die hier ebenfalls gültig sind.