# Vorlesungen über technische Mechanik

**Föppl, August**

**Leipzig, 1900**

Allgemeine Form der Lösung (Gl. 329).

wird. Nach Einsetzen aus Gl. (325) und Gl. (326) geht diese Bedingungsgleichung über in

$$b_2 + b_3 x + c_2 + c_3 x = 0,$$

und da diese identisch erfüllt sein muss, folgt für die Constanten

$$c_2 = -b_2 \quad \text{und} \quad c_3 = -b_3. \tag{328}$$

Die Verschiebungen $\xi\ \eta\ \zeta$ wollten wir (vgl. § 63) auf ein Coordinatensystem beziehen, das auf dem Körper selbst festgelegt ist. Im Ursprunge ist daher

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0.$$

Da ferner die $X$-Axe stets durch denselben unendlich benachbarten Punkt gehen sollte, so wird im Ursprunge auch

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0,$$

und da schliesslich die $XY$-Ebene durch einen dritten unendlich benachbarten Punkt geführt sein sollte, muss im Ursprunge auch

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0$$

sein. Diese Festsetzungen gestatten die Bestimmung der meisten Constanten $b$ und $c$. Aus der ersten Reihe folgt nämlich

$$b_0 = 0; \quad c_0 = 0,$$

aus der zweiten

$$b_1 = 0; \quad c_1 = 0,$$

und aus der dritten Bedingung

$$c_2 = 0.$$

Hierdurch und durch die Gl. (328) werden alle Constanten $b$ und $c$ bis auf eine, nämlich $b_3 = -c_3$ bekannt. Diese eine noch unbekannt gebliebene Constante sei kurz mit $c$ bezeichnet. Dann vereinfachen sich die Werthe für die Verschiebungscomponenten wie folgt

$$\eta = cxz; \quad \zeta = -cxy; \quad \xi = \varphi(yz). \tag{329}$$

Die einzige erhebliche Schwierigkeit des Problems besteht jetzt noch in der Bestimmung der Function $\xi = \varphi(yz)$, die der Differentialgleichung (327) genügen muss. Man beachte, dass $\xi = \varphi(yz)$ für $x = 0$ die Gleichung der Fläche angibt, in die der Querschnitt $x = 0$ durch die Formänderung übergeht. Alle anderen Querschnitte nehmen dieselbe Gestalt an, da $\xi$ unabhängig von $x$ ist. Früher, als die heute als richtig erkannte de Saint-Vénant'sche Theorie der Torsion noch nicht bekannt war, nahm man an, dass die Querschnitte eben blieben. Wir wollen zusehen, inwiefern dies richtig sein konnte. Nach dieser Annahme müsste $\xi$ eine lineare Function von $y$ und $z$ sein; wir setzen also versuchsweise

$$\xi = \varphi(yz) = a_1 y + a_2 z, \tag{330}$$

ein Ansatz, der die Differentialgleichung (327) in der That befriedigt, also zu einem möglichen Spannungszustande führt. Nun haben wir aber noch die Grenzbedingungen an der Oberfläche der Welle zu erfüllen. Bei gewöhnlichen Torsionsaufgaben ist die Mantelfläche der Welle, abgesehen von den Stellen, wo Räder oder Riemenscheiben aufgekeilt sind, frei von äusseren Kräften. Ausser den schon von vornherein gleich Null gesetzten Spannungscomponenten $\sigma_y \sigma_z \tau_{yz}$ muss also an der Oberfläche auch noch jene Schubspannungscomponente gleich Null sein, die in der durch die Stabaxe und die Normale zur Oberfläche bestimmten Ebene liegt. Oder mit anderen Worten: die Schubspannung muss über den Querschnitt jedenfalls so vertheilt sein, dass sie den Umfang überall berührt. Das war die Grenzbedingung, die wir bei der Behandlung der Torsionsfestigkeit im neunten Abschnitte überall voranstellten und sie muss natürlich auch hier noch berücksichtigt werden. Bisher war von ihr noch nicht die Rede; sie ist es aber gerade, die die noch ausstehende Bestimmung der unbekannten Function $\xi$ oder $\varphi$ ermöglicht oder die umgekehrt lehrt, unter welchen Umständen eine solche Lösung der partiellen Differentialgleichung (327) wie die in Gl. (330) gegebene der Wirklichkeit entspricht.

Um diese Bedingung in Form einer Gleichung ausdrücken zu können, gehe ich auf die Werthe für die Spannungscomponenten $\tau_{xy}$ und $\tau_{xz}$ in den Gl. (288) zurück. Danach war