Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

§. 68. Reine Verdrehungsbeanspruchung.

urn:nbn:de:hbz:466:1-84594

Punkt Klarheit zu verbreiten, wäre damit ihre Existenzberechtigung schon nachgewiesen. Wir werden aber jetzt sehen, dass sie auch nach anderen Richtungen hin zu sehr werthvollen Aufschlüssen geführt hat.

§ 68. Reine Verdrehungsbeanspruchung.

Die Untersuchungen in § 66 bezogen sich auf einen Stab, der gleichzeitig auf Biegung und auf Torsion beansprucht sein konnte. Nachdem wir die Folgerungen hervorgehoben haben, die sich aus der allgemeinen Untersuchung für die Biegungsspannungen ergeben, ist es besser, wenn wir jetzt weiterhin die Aufgabe dadurch vereinfachen, dass wir die Beanspruchung auf Verwinden für sich untersuchen. Zu diesem Zwecke setze ich also jetzt überall $\sigma_x = 0$, oder, was auf dasselbe hinaus kommt,

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0. \tag{319}$$

Mit Gl. (318) ist dieser Ansatz verträglich; er geht aus dieser Gleichung hervor, wenn man annimmt, dass in dem besonderen Falle, den wir fernerhin betrachten wollen, alle mit a bezeichneten Constanten verschwinden.

Aus Gl. (319) folgt

$$\xi = \varphi(y, z), \tag{320}$$

wenn φ irgend eine bis jetzt unbekannte Function der Querschnittscoordinaten bedeutet. Mit Gl. (319) gehen ferner die Gl. (306), die den von de Saint-Vénant untersuchten Spannungszustand näher beschreiben, in die einfachere Form

$$e = 0; \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0 \tag{321}$$

über. Auch die durch die Gl. (307) ausgesprochenen allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen vereinfachen sich hier erheblich. Sie lauten jetzt

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}&=0\\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2}&=0\\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}&=0\end{aligned}\right\} \qquad (322)$$

Ausserdem gelten auch alle übrigen Gleichungen, die wir in § 66 gefunden haben, da der hier zu behandelnde Fall in dem früheren mit enthalten ist. So erhalten wir aus den Gl. (308) und (309)

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2}=0; \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}=0 \qquad (323)$$

und aus den Gl. (310) und (311)

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}=0; \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}=0. \qquad (324)$$

Wir wissen jetzt so viel von den Differentialquotienten der Functionen η und ζ, dass wir deren analytische Form im Allgemeinen angeben können. Die Function η muss nämlich nach Gl. (321) unabhängig von y sein und nach Gl. (323) muss sie linear sein in Bezug auf x und z. Sie ist daher von der Form

$$\eta = b_0 + b_1 x + z(b_2 + b_3 x), \qquad (325)$$

in der die b unbekannte, aber constante Grössen sind. Ebenso folgt für ζ

$$\zeta = c_0 + c_1 x + y(c_2 + c_3 x). \qquad (326)$$

Fügen wir dazu noch die Gl. (320)

$$\xi = \varphi(yz),$$

so ist damit ein Werthsystem der Verschiebungen $\xi\ \eta\ \zeta$ angegeben, das zunächst einem möglichen Zwangszustande entspricht, falls nur die unbekannte Function $\varphi(yz)$ so gewählt wird, dass sie der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi(yz)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varphi(yz)}{\partial z^2}=0 \qquad (327)$$

genügt, und das ausserdem auch die Bedingungsgleichungen (321) befriedigt, falls wir die Constanten b und c so wählen, dass

$$\frac{\partial \eta}{\partial z}+\frac{\partial \zeta}{\partial y}=0$$

wird. Nach Einsetzen aus Gl. (325) und Gl. (326) geht diese Bedingungsgleichung über in

$$b_2 + b_3 x + c_2 + c_3 x = 0,$$

und da diese identisch erfüllt sein muss, folgt für die Constanten

$$c_2 = -b_2 \quad \text{und} \quad c_3 = -b_3. \tag{328}$$

Die Verschiebungen $\xi\ \eta\ \zeta$ wollten wir (vgl. § 63) auf ein Coordinatensystem beziehen, das auf dem Körper selbst festgelegt ist. Im Ursprunge ist daher

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0.$$

Da ferner die X-Axe stets durch denselben unendlich benachbarten Punkt gehen sollte, so wird im Ursprunge auch

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0,$$

und da schliesslich die XY-Ebene durch einen dritten unendlich benachbarten Punkt geführt sein sollte, muss im Ursprunge auch

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0$$

sein. Diese Festsetzungen gestatten die Bestimmung der meisten Constanten b und c. Aus der ersten Reihe folgt nämlich

$$b_0 = 0; \quad c_0 = 0,$$

aus der zweiten

$$b_1 = 0; \quad c_1 = 0,$$

und aus der dritten Bedingung

$$c_2 = 0.$$

Hierdurch und durch die Gl. (328) werden alle Constanten b und c bis auf eine, nämlich $b_3 = -c_3$ bekannt. Diese eine noch unbekannt gebliebene Constante sei kurz mit c bezeichnet. Dann vereinfachen sich die Werthe für die Verschiebungscomponenten wie folgt

$$\eta = cxz; \quad \zeta = -cxy; \quad \xi = \varphi(yz). \tag{329}$$

Die einzige erhebliche Schwierigkeit des Problems besteht jetzt noch in der Bestimmung der Function $\xi = \varphi(yz)$, die der Differentialgleichung (327) genügen muss. Man beachte, dass $\xi = \varphi(yz)$ für $x = 0$ die Gleichung der Fläche angibt, in die der Querschnitt $x = 0$ durch die Formänderung übergeht. Alle anderen Querschnitte nehmen dieselbe Gestalt an, da ξ unabhängig von x ist. Früher, als die heute als richtig erkannte de Saint-Vénant'sche Theorie der Torsion noch nicht bekannt war, nahm man an, dass die Querschnitte eben blieben. Wir wollen zusehen, inwiefern dies richtig sein konnte. Nach dieser Annahme müsste ξ eine lineare Function von y und z sein; wir setzen also versuchsweise

$$\xi = \varphi(yz) = a_1 y + a_2 z, \tag{330}$$

ein Ansatz, der die Differentialgleichung (327) in der That befriedigt, also zu einem möglichen Spannungszustande führt. Nun haben wir aber noch die Grenzbedingungen an der Oberfläche der Welle zu erfüllen. Bei gewöhnlichen Torsionsaufgaben ist die Mantelfläche der Welle, abgesehen von den Stellen, wo Räder oder Riemenscheiben aufgekeilt sind, frei von äusseren Kräften. Ausser den schon von vornherein gleich Null gesetzten Spannungscomponenten $\sigma_y \sigma_z \tau_{yz}$ muss also an der Oberfläche auch noch jene Schubspannungscomponente gleich Null sein, die in der durch die Stabaxe und die Normale zur Oberfläche bestimmten Ebene liegt. Oder mit anderen Worten: die Schubspannung muss über den Querschnitt jedenfalls so vertheilt sein, dass sie den Umfang überall berührt. Das war die Grenzbedingung, die wir bei der Behandlung der Torsionsfestigkeit im neunten Abschnitte überall voranstellten und sie muss natürlich auch hier noch berücksichtigt werden. Bisher war von ihr noch nicht die Rede; sie ist es aber gerade, die die noch ausstehende Bestimmung der unbekannten Function ξ oder φ ermöglicht oder die umgekehrt lehrt, unter welchen Umständen eine solche Lösung der partiellen Differentialgleichung (327) wie die in Gl. (330) gegebene der Wirklichkeit entspricht.

Um diese Bedingung in Form einer Gleichung ausdrücken zu können, gehe ich auf die Werthe für die Spannungscomponenten τ_{xy} und τ_{xz} in den Gl. (288) zurück. Danach war

$$\tau_{xy} = G\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right); \quad \tau_{xz} = G\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right).$$

Wenn die Gleichung des Querschnittsumrisses (oder auch eines Theiles des ganzen Querschnittsumrisses) in der Form

$$z = f(y)$$

angeschrieben wird, so muss, damit die aus den Componenten τ_{xy} und τ_{xz} resultirende Schubspannung den Querschnittsumfang berührt,

$$\frac{\tau_{xz}}{\tau_{xy}} = \frac{dz}{dy} \tag{331}$$

sein. Also haben wir noch für den Querschnittsumfang die Bedingungsgleichung

$$\frac{\dfrac{\partial \xi}{\partial z} + \dfrac{\partial \zeta}{\partial x}}{\dfrac{\partial \xi}{\partial y} + \dfrac{\partial \eta}{\partial x}} = \frac{dz}{dy}, \tag{332}$$

oder, wenn man die Werthe von η und ζ aus Gl. (329) einsetzt,

$$\frac{\dfrac{\partial \xi}{\partial z} - cy}{\dfrac{\partial \xi}{\partial y} + cz} = \frac{dz}{dy}. \tag{333}$$

Dieser Gleichung muss ξ überall an der Oberfläche genügen, wenn die Oberfläche frei von äusseren Kräften sein soll und zwar nicht nur für den besonderen Fall, den wir hier untersuchen, sondern ganz allgemein.

Wir prüfen jetzt, unter welchen Umständen der in Gl. (330) aufgestellte Werth von ξ auch dieser Grenzbedingung genügt. Gl. (333) geht hier über in

$$\frac{a_2 - cy}{a_1 + cz} = \frac{dz}{dy}.$$

Diese gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung kann sofort integrirt werden. Durch Trennung der Variablen erhält man

$$(a_2 - cy)\, dy = (a_1 + cz)\, dz$$

oder nach Integration

$$a_1 z + \frac{c}{2} z^2 - a_2 y + \frac{c}{2} y^2 = K.$$

Das ist aber, wie man aus der Gleichheit der Coefficienten von y^2 und z^2 erkennt, die Gleichung eines Kreises. Damit ist bewiesen, dass nur bei kreisförmigen Querschnitten nach der Torsion alle Punkte, die vorher auf einem Querschnitte lagen, auch nachher noch in einer Ebene enthalten sein können. In allen anderen Fällen geht die Querschnittsebene in eine gekrümmte Fläche über. Die Kritik, die wir jetzt üben, fällt daher bei der Verdrehung ganz anders aus als bei der Biegung. Während dort wenigstens die Spannungsvertheilung der Navier'schen Theorie bestätigt wurde, erkennen wir hier, dass die ältere Theorie der Torsion falsch war mit einziger Ausnahme des kreisförmigen Querschnitts und man muss wohl beachten, dass dieser wichtige Aufschluss, der inzwischen freilich schon auf die ganze Gestaltung der elementaren Theorie der Torsion zurückgewirkt hat, erst durch die strenge Elasticitätstheorie gegeben wurde. — Zugleich bildet übrigens das eben gewonnene Resultat eine willkommene Bestätigung der früher vorgetragenen Theorie der Torsion für Wellen von kreisförmigem Querschnitte.

§ 69. Fortsetzung für den elliptischen Querschnitt.

Für Gl. (327) kann man beliebig viele Lösungen angeben. Jede dieser Lösungen entspricht einem möglichen Spannungszustande. Damit dieser wirklich zu Stande komme, muss man aber noch für die Erfüllung der Grenzbedingungen an der Körperoberfläche Sorge tragen. Besteht die Grenzbedingung an der Mantelfläche des Stabes darin, dass diese frei von äusseren Kräften sein soll, so wird sie, wie wir schon sahen, durch Gl. (333) zum Ausdrucke gebracht. Man kann nun entweder so verfahren, dass man irgend eine beliebige Lösung der partiellen Differentialgleichung (327) annimmt und dann nach Gl. (333) die Gestalt des Querschnitts bestimmt, für die diese Lösung