



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

§. 65. Die Eindeutigkeit der Lösung des Problems.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-84594](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-84594)

aber nach Gl. (45) $\frac{\tau^2}{2G}$, wofür auch $\frac{1}{2} G \gamma^2$ geschrieben werden kann. Sobald man daher die Winkeländerung γ zu messen oder wenigstens zu schätzen vermochte, konnte man auch die Grössen G und μ ableiten. Die hiernach vorgenommenen Schätzungen führten stets zu äusserst kleinen Werthen für die spezifische Masse des Aethers und man erblickte darin einen Grund für die Zulässigkeit der ganzen Theorie. Seit man den Zusammenhang der optischen mit den elektromagnetischen Erscheinungen erkannt und experimentell nachgewiesen hat, kommt indessen allen diesen Betrachtungen nur noch ein historischer Werth zu.

§ 65. Die Eindeutigkeit der Lösung des Problems.

Bei allen folgenden Untersuchungen nehme ich an, dass die Körper in Ruhe sind und dass das Eigengewicht jenes Körpers, dessen Spannungs- und Formänderungszustand untersucht werden soll, unerheblich gegenüber den Lasten ist, die an seiner Oberfläche auf ihn übertragen werden. Diese Lasten sind ausserdem überall als gegeben zu betrachten.

Man nehme nun an, dass irgend ein System von Verschiebungen $\xi\eta\zeta$ vorgeschlagen sei, von dem sich nachweisen lässt, dass es die Grundgleichungen befriedigt. Diese Grundgleichungen selbst lassen sich hier übrigens mit Rücksicht auf die ausgesprochene Voraussetzung in der einfacheren Form

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \xi + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial x} &= 0 \\ \nabla^2 \eta + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial y} &= 0 \\ \nabla^2 \zeta + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (304)$$

anschreiben. Wir wollen der kürzeren Ausdrucksweise wegen ein solches System von Verschiebungen, das diese Gleichungen befriedigt, ein mögliches nennen. Damit wird nur gesagt, dass dieses System nicht gegen die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen verstösst, die zwischen den Spannungen an jedem

Körperelemente bestehen müssen, — unter der Voraussetzung natürlich, dass der Stoff, aus dem der Körper besteht, dem Hooke'schen Elasticitätsgesetze gehorcht. Die wirklichen Verschiebungen müssen also jedenfalls zu den möglichen gehören; es fragt sich aber noch, ob die vorgeschlagenen Werthe von $\xi \eta \zeta$ mit den wirklichen übereinstimmen.

Um dies zu prüfen, erinnern wir uns, dass nach den Gl. (288) und (292) zu jedem Zwangszustande — wie wir den durch die Verschiebungen $\xi \eta \zeta$ beschriebenen Zustand nennen können — ein eindeutig bestimmter Spannungszustand gehört. Mit der Annahme eines Zwangszustandes $\xi \eta \zeta$ erhalten wir daher auch überall an der Oberfläche des Körpers Spannungen, die dort mit den von aussen her übertragenen Lasten im Gleichgewichte stehen müssen. Diese Gleichgewichtsbedingungen an der Körperoberfläche werden durch die Gleichungen (6) ausgesprochen und sie müssen ebenfalls an jeder Stelle des Umfangs erfüllt sein, wenn der mögliche Spannungszustand mit dem wirklichen, der der besonderen Art der Belastung entspricht, übereinstimmen soll. Wir wollen jetzt annehmen, dass der aus dem vorgeschlagenen Zwangszustande abgeleitete Spannungszustand auch dieser Bedingung überall genüge. Dann lässt sich in der That behaupten, dass der vorgeschlagene Zwangszustand mit dem wirklichen übereinstimmt. Mit anderen Worten heisst dies, dass es nur ein einziges System von Verschiebungen $\xi \eta \zeta$ gibt, das die Grundgleichungen (304) befriedigt und zugleich zu Spannungen führt, die an der Oberfläche des Körpers den dort bestehenden Grenzbedingungen genügen.

Um dies zu beweisen, wollen wir zunächst annehmen, es wäre noch ein zweites System von Verschiebungen $\xi' \eta' \zeta'$ möglich, das alle Bedingungen ebenfalls erfüllte. Dann geben auch die Differenzen

$$\xi'' = \xi - \xi'; \quad \eta'' = \eta - \eta'; \quad \zeta'' = \zeta - \zeta'$$

ein mögliches System von Verschiebungen an, wie man durch Einsetzen dieser Werthe in die Grundgleichungen (304) erkennt. Denn man hätte z. B.

$e'' = e - e'$ und $\nabla^2 \xi'' = \nabla^2 \xi - \nabla^2 \xi'$
 und die erste der Grundgleichungen würde für das neue Ver-
 schiebungssystem übergehen in

$$\nabla^2 \xi - \nabla^2 \xi' + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial x} - \frac{m}{m-2} \frac{\partial e'}{\partial x} = 0.$$

Nach der Voraussetzung, dass schon ξ und ξ' mögliche Ver-
 schiebungen waren, muss aber für sich

$$\nabla^2 \xi + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial x} = 0 \quad \text{und} \quad \nabla^2 \xi' + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e'}{\partial x} = 0$$

sein. In der That ist also dann auch

$$\nabla^2 \xi'' + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e''}{\partial x} = 0$$

und ebenso bei den beiden anderen Gleichungen. Der Grund
 für die Möglichkeit dieser Superposition liegt darin, dass die
 Grundgleichungen linear sind.

Dem möglichen Verschiebungssysteme $\xi'' \eta'' \zeta''$ entspricht
 nun auch ein bestimmter Spannungszustand des Körpers. Auch
 diese Spannungen folgen aus den früheren, für beide Fälle
 bestehenden durch Bildung der Differenzen, wie aus den Glei-
 chungen (288) und (292) hervorgeht. Man hat also z. B.

$$\sigma_x'' = \sigma_x - \sigma_x'$$

u. s. f. Wir nahmen ferner an, dass $\xi \eta \zeta$ und $\xi' \eta' \zeta'$ auch allen
 Grenzbedingungen genügen sollten. An jeder Stelle der Körper-
 oberfläche bilden also sowohl die Spannungen σ_x u. s. f. als
 die σ_x' u. s. f. ein Gleichgewichtssystem mit den von aussen
 her übertragenen Druckkräften. Die Spannungen σ_x'' u. s. f.
 verlangen daher, wenn sie an der Oberfläche des Körpers auf-
 treten sollen, dass dort gar keine Druckkräfte von aussen her
 übertragen werden. Gehörte zu den Grenzbedingungen, dass
 ein bestimmter Punkt des Körpers festgehalten sei, so musste
 dort sowohl $\xi = 0$ als $\xi' = 0$ u. s. f. und daher auch $\xi'' =$
 $\xi - \xi' = 0$ sein.

Wir haben also in dem Zwangs- und Spannungszustande,
 der durch die Werthe ξ'' u. s. f. und σ_x'' u. s. f. beschrieben ist,
 einen Zustand des Körpers vor uns, bei dem gar keine äusseren

Kräfte auf diesen übertragen werden; mit anderen Worten, dieser Zustand entspricht dem natürlichen Zustande des Körpers. Nun habe ich freilich schon früher einmal darauf aufmerksam gemacht, dass selbst im unbelasteten Zustande des Körpers unter Umständen Spannungen bestehen können, z. B. die sogenannten Gussspannungen. Diese hängen aber von Umständen ab, die mit unserer Aufgabe nichts zu thun haben und deren Berechnung daher auch nicht verlangt werden kann. Wir wollen nur jene Spannungen ermitteln, die durch die Lasten hervorgerufen werden. Wir nehmen daher an, dass im natürlichen Zustande keine Spannungen auftreten und setzen σ_x'' u. s. f. = 0. Ausdrücklich müssen wir uns dabei freilich daran erinnern, dass etwaige Eigenspannungen von unserer Untersuchung überhaupt nicht berührt werden. Mit $\xi'' = 0, \eta'' = 0, \zeta'' = 0$ folgt aber

$$\xi' = \xi; \quad \eta' = \eta; \quad \zeta' = \zeta,$$

d. h. die beiden vorgeschlagenen Zwangszustände, die alle Bedingungen mit Einschluss der Grenzbedingungen erfüllen sollten, müssen identisch miteinander sein. Die Lösung der Aufgabe ist daher eine eindeutige und wir sind sicher, den wahren Spannungszustand ermittelt zu haben, wenn wir nachweisen können, dass er allen aufgestellten Bedingungen entspricht.

§ 66. Die Lösung von de Saint-Venant.

Als in den vorausgehenden Abschnitten die Biegung und die Verwindung eines Stabes untersucht wurde, nahm ich überall ohne weiteren Beweis an, dass die parallel zur Stabaxe verlaufenden Fasern keinen merklichen Querdruck oder Querszug und auch keine Schubspannungen in der Richtung quer zur Stabaxe aufeinander übertrügen. Mit anderen Worten, wenn wie seither stets die X-Axe in die Richtung der Stabmittellinie gelegt ist, wurde

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0 \quad (305)$$

gesetzt. Wenn dies auch nicht gerade ausdrücklich ausgesprochen wurde, so wurde doch auf Spannungen in diesen