



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

§. 64. Wellenbewegungen in elastischen Körpern.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-84594](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-84594)

§ 64. Wellenbewegungen in elastischen Körpern.

Bei den meisten Aufgaben der Festigkeitslehre spielt die auf die Masse des Körpers übertragene Fernkraft \mathfrak{F} mit den Componenten XYZ gar keine Rolle. Gewöhnlich besteht sie nur aus dem Gewichte des Körpers und häufig genug würde sich der Spannungszustand kaum merklich ändern, wenn der Körper ganz gewichtslos wäre und nur die an der Oberfläche übertragenen äusseren Kräfte an ihm wirkten. In solchen Fällen vereinfachen sich die Gl. (294) bis (296) entsprechend, indem die letzten Glieder auf der linken Seite fortfallen. Mit derartigen Fällen werde ich mich in den folgenden Paragraphen ausschliesslich beschäftigen; hier soll aber auf eine Anwendung der Gl. (294) aufmerksam gemacht werden, bei der diese Glieder beibehalten werden müssen.

Wenn der Körper nicht im Gleichgewichte, sondern in ungleichförmiger Bewegung begriffen ist, müssen sich die an dem Umfange eines Körperelementes übertragenen Spannungen sammt dem Gewichte des Elementes zu einer Resultirenden zusammensetzen, die nach dem dynamischen Grundgesetze aus der Beschleunigung des Elementes berechnet werden kann. Ein rechtwinkliges Parallelepiped von den Kantenlängen $dx dy dz$ hat die Masse

$$\mu dx dy dz,$$

wenn mit μ die specifische Masse (das specifische Gewicht, getheilt durch die Beschleunigung der Schwere) bezeichnet wird. Die elastischen Verschiebungen $\xi \eta \zeta$ sollen jetzt nicht nur Functionen des Ortes, sondern auch Functionen der Zeit t sein. Die Componenten der Beschleunigung, die das Körperelement in einem gegebenen Augenblicke erfährt, werden durch die Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}$$

dargestellt und die Resultirende aller an dem Körperelemente angreifenden Kräfte muss nach dem dynamischen Grundgesetze die Componenten

$$\mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} dx dy dz, \quad \mu \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} dx dy dz, \quad \mu \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} dx dy dz$$

haben. Anstatt die Aussage in dieser Form zu machen, kann man sich auch eine Kraft an jedem Körperelemente zugefügt denken, deren Componenten den vorher angegebenen entgegengesetzt sind. Die wirklich vorhandenen Kräfte mit Einschluss dieser willkürlich zugefügten müssen dann im Gleichgewichte stehen. Das ist die Ueberlegung, nach der man jeden Fall der Bewegung auf einen Gleichgewichtsfall zurückführen kann. In der Dynamik wird davon weiter die Rede sein; ich will aber jetzt schon erwähnen, dass man eine solche Schlussweise mit dem Namen des d'Alembert'schen Principis bezeichnet.

Die willkürlich zugefügte Kraft, durch die wir den Fall auf einen Gleichgewichtsfall zurückführen, ist wie das Gewicht und wie andere Fernkräfte dem Volumen des Körperelementes proportional. Es ist daher am einfachsten, wenn wir sie unmittelbar mit \mathfrak{P} , oder ihre Componenten mit XYZ vereinigen. Man hat dann nur den Faktor $dx dy dz$ von den vorausgehenden Ausdrücken zu streichen, um die Kraft auf die Volumeneinheit zu beziehen und die zurückbleibenden Faktoren mit gewechseltem Vorzeichen zu X bzw. Y oder Z zu addiren.

Gegenüber diesen nach dem d'Alembert'schen Princip zugefügten Massenkräften, die bei schnellen Schwingungen sehr gross werden können, ist das Eigengewicht des Körperelements gewöhnlich unbedeutend. Dieses hat übrigens ohnehin auf die elastischen Schwingungen, die wir untersuchen wollen, keinen Einfluss, da es keinem periodischen Wechsel unterworfen ist, sondern stets unter den gleichen Bedingungen und in gleicher Richtung und Grösse auf den Körper einwirkt. Wir können uns daher den Körper ebenso gut auch als gewichtslos — aber nicht als masselos! — denken, d. h. wir können uns ihn etwa auf den Mond oder an eine andere Stelle mit noch kleinerer Beschleunigung der Schwere versetzt denken, ohne dass sich an den elastischen Bewegungen etwas ändern würde, vorausgesetzt, dass nur alle übrigen Bedingungen ungeändert blieben.

Dann bleibt als Massenkraft nur die Kraft $-\mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ in der Richtung der X-Axe u. s. f. zurück und die Gl. (294) nehmen die Form an

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \xi + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial x} &= \frac{\mu}{G} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \\ \nabla^2 \eta + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial y} &= \frac{\mu}{G} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, \\ \nabla^2 \zeta + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial z} &= \frac{\mu}{G} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}. \end{aligned} \right\} (297)$$

Diese Gleichungen sprechen das Gesetz aus, nach dem sich eine elastische Formänderung im Verlaufe der Zeit innerhalb eines elastischen Körpers ausbreiten muss. Wir wissen schon aus der Erfahrung, dass dies in Form einer Welle geschieht; eine besondere Art dieser Wellen kennen wir als die Schallwellen. Wir wollen zunächst sehen, was aus den Gl. (297) über die Schallwellen zu schliessen ist.

Betrachten wir eine ebene Schallwelle, die sich in der Richtung der X-Axe ausbreitet und erinnern wir uns, dass nach den Lehren der Experimentalphysik die Schallbewegung als eine periodische Bewegung aufzufassen ist, die bei einem einfachen Tone als eine Sinusfunction der Zeit dargestellt werden kann, so werden wir zu der Ansicht geführt, dass

$$\xi = A \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{\tau} \right); \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0 \quad (298)$$

eine mögliche Schwingungsform des elastischen Körpers darstellen müsse. Wenn ich vorher sagte, dass die Sinusfunction aus den Versuchen zu entnehmen wäre, so ist damit natürlich nur gemeint, dass sich die Versuchsergebnisse ungefähr so darstellen lassen. Ob der gewählte Ansatz genau richtig ist kann erst geschlossen werden, indem man prüft, ob er die Gl. (297) erfüllt. Im Uebrigen bemerke ich noch zu den Constanten, die in den Ausdruck für ξ aufgenommen wurden, dass A den grössten Werth darstellt, den ξ während der Schwingung erreicht; man nennt A die Amplitude oder den Ausschlag der Schwingung. Die Constante λ hat die Bedeutung der Wellenlänge der Schwingung, denn wenn man x um λ vermehrt,

ohne die Zeit zu ändern, vergrößert sich der Winkel, von dem der Sinus genommen werden soll, um 2π , die frühere Werthreihe des Sinus wiederholt sich also von diesem Punkte an wieder, wenn wir darüber hinausgehen. Ebenso hat τ die Bedeutung der Dauer einer vollen Schwingung, da die Aenderung von t um τ oder um ein Vielfaches davon nichts an dem Sinus oder an ξ ändert. Denkt man sich gleichzeitig x und t ein wenig vermehrt, so kann ξ denselben Werth beibehalten; man sagt dann, die Welle habe sich in der Zeit Δt um die Strecke Δx fortbewegt. In der That finden sich nach Δt alle Zustände (alle Phasen, wie man zu sagen pflegt) in derselben Aufeinanderfolge, aber um die Strecke Δx in der Richtung der X-Axe verschoben, falls nur

$$\frac{\Delta x}{\lambda} - \frac{\Delta t}{\tau} = 0$$

ist. Man kann nun auch von der Geschwindigkeit reden, mit der sich die Welle fortpflanzt. Dabei muss man nur beachten, dass hier nicht, wie sonst in der Mechanik, darunter die Bewegung eines Körpers, also etwa die Bewegung gemeint ist, die das Volumenelement im gegebenen Augenblicke ausführt, sondern nur die Geschwindigkeit, mit der ein gewisser genau definirbarer Zustand fortschreitet. Bezeichnet man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schallbewegung mit v , so ist v bestimmt durch

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

oder, wenn man das Verhältniss der Werthe Δx und Δt aus der vorausgehenden Gleichung entnimmt,

$$v = \frac{\lambda}{\tau}. \quad (299)$$

Nach diesen Vorbemerkungen müssen wir prüfen, ob der durch die akustischen Erscheinungen nahegelegte Ansatz (298) die Gl. (297) befriedigt. Dabei ist wohl zu bedenken, dass diese Gleichungen auf allgemeinen Gesetzen der Mechanik, an deren stenger Gültigkeit kein Zweifel bestehen kann und ausserdem nur noch auf dem Hooke'schen Elasticitätsgesetze

beruhen. Sofern auch dieses letzte bei dem betreffenden Stoffe erfüllt ist, können wir den Ergebnissen der Gleichungen (297) unbedingtes Vertrauen entgegenbringen. — Wir bilden zunächst die spezifische Volumenänderung e . Durch Einsetzen der Werthe (298) in Gl. (287) finden wir

$$e = A \frac{2\pi}{\lambda} \cos 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{\tau} \right)$$

und hiermit werden die Differentialquotienten von e

$$\frac{\partial e}{\partial x} = -A \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{\tau} \right); \quad \frac{\partial e}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial e}{\partial z} = 0.$$

Die zweite und dritte der Gleichungen (297) sind erfüllt, da sich jedes der ihnen vorkommenden Glieder auf Null reducirt. Ferner ist nach (298)

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = A \frac{2\pi}{\lambda} \cos 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{\tau} \right); \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \xi}{\partial z} = 0.$$

Daher reducirt sich in diesem Falle $\nabla^2 \xi$ auf

$$\nabla^2 \xi = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -A \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{\tau} \right),$$

d. h. auf denselben Werth wie $\frac{\partial e}{\partial x}$. Auch nach t lässt sich ξ ohne Weiteres differentiiren und wenn man diese Werthe alle in die erste der Gl. (297) einsetzt, geht sie über in

$$-\frac{2m-2}{m-2} A \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{\tau} \right) = -\frac{\mu}{G} A \left(\frac{2\pi}{\tau} \right)^2 \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{\tau} \right).$$

Man sieht, dass diese Gleichung in der That identisch erfüllt ist, ohne Rücksicht auf den Werth der Amplitude A , d. h. der Stärke des Schalls, falls nur die Bedingungsgleichung

$$\frac{2m-2}{m-2} \cdot \left(\frac{1}{\lambda} \right)^2 = \frac{\mu}{G} \cdot \left(\frac{1}{\tau} \right)^2$$

zwischen Wellenlänge λ und Schwingungsdauer τ befriedigt ist. Beide müssen nothwendig von einander abhängen und zwar so, dass das Verhältniss $\frac{\lambda}{\tau}$ oder die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v unabhängig von der Wellenlänge und nur

von den physikalischen Eigenschaften des Stoffs abhängig ist. Durch Auflösen der Gleichung nach $\frac{\lambda}{\tau}$ erhält man

$$v = \frac{\lambda}{\tau} = \sqrt{\frac{G}{\mu} \cdot \frac{2m-2}{m-2}}. \quad (300)$$

Diese Folgerung der Theorie ist nun in der That in bester Uebereinstimmung mit der Erfahrung; namentlich der Schluss, dass lange und kurze Wellen ebenso wie schwache oder starke Wellen mit derselben Geschwindigkeit fortgepflanzt werden müssen, hat sich bisher vollständig bewährt.

Natürlich gilt diese ganze Ableitung nur für die Schallwellen in den elastischen festen Körpern; für die Schallwellen in der Luft lässt sich eine ähnliche Entwicklung anstellen, die ebenfalls zu einer mit Gl. (300) verwandten Gleichung für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v führt. — Nimmt man für Flusseisen $m = \frac{10}{3}$, $G = 850000$ atm und das spezifische Gewicht = 7,7, d. h. die spezifische Masse

$$\mu = \frac{0,0077 \text{ kg}}{1 \text{ cm}^3 \cdot 981 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}} = 785 \cdot 10^{-8} \frac{\text{kg sec}^2}{\text{cm}^4},$$

so wird

$$v = \sqrt{\frac{850000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}}{785 \cdot 10^{-8} \frac{\text{kg sec}^2}{\text{cm}^4}} \cdot 3,5} = 616 \cdot 10^3 \frac{\text{cm}}{\text{sec}} = 6160 \frac{\text{m}}{\text{sec}}.$$

Die Schallgeschwindigkeit in der Luft ist bekanntlich $333 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

Die im Flusseisen haben wir fast 20mal so gross berechnet. In der That zeigt aber auch der Versuch, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in festen Körpern viel grösser ist als in der Luft.

Der Umstand, dass die Fortpflanzungsgesetze für den Schall auch bei Steinen, Mauerwerk u. s. f. ganz gut mit den aus dem Hooke'schen Gesetze abgeleiteten Folgerungen übereinstimmen, gibt den stärksten Grund für die Vermuthung ab, dass auch diese Körper bei sehr kleinen elastischen Formänderungen, wie

sie bei Schallschwingungen vorkommen, ziemlich genau dem Hooke'schen Gesetze gehorchen, obschon sie bei grösseren Formänderungen erheblich davon abweichen. Wer die Versuchswerthe in ein empirisches Elasticitätsgesetz für solche Körper zusammenfassen will, sollte diesen Satz wohl im Auge behalten; die im zweiten Abschnitte behandelte Formel von Schüle verstösst gegen diesen Satz und wenn man sie trotzdem aufrecht erhalten will, ist man den Nachweis schuldig, dass auch unter der Voraussetzung dieses Gesetzes Schallschwingungen zu Stande kommen könnten, die den Beobachtungen nicht widersprechen. Die Rechnung dürfte ja wohl, wenn sie in geschickter Weise angestellt wird, keine zu grossen Schwierigkeiten bereiten.

Setzt man in Gl. (300) $m = 2$, so liefert sie $v = \infty$. Wir sahen schon früher (siehe S. 61), dass m nie kleiner als 2 werden kann, und dass bei $m = 2$ der Körper keine Volumenänderungen unter dem Einflusse des Spannungszustandes erfährt, dass er also unzusammendrückbar ist. In einem unzusammendrückbaren (raumbeständigen) Körper würde sich also eine longitudinale Welle, wie wir sie jetzt behandeln, mit unendlich grosser Geschwindigkeit fortpflanzen, d. h. von einer eigentlichen Wellenbewegung könnte gar nicht mehr die Rede sein, sondern nur von einer augenblicklichen Uebertragung der an einer Stelle hervorgebrachten Störung über den ganzen Raum, den der Körper einnimmt.

Ausser den longitudinalen kommen in der Physik noch die transversalen Wellenbewegungen vor. Um eine Transversalwelle analytisch darzustellen, setze ich

$$\xi = A \sin 2\pi \left(\frac{y}{\lambda} - \frac{t}{\tau} \right); \quad \eta = 0; \quad \zeta = 0. \quad (301)$$

Die Schwingungen erfolgen hier immer noch, wie bei den Gl. (298), in der Richtung der X-Axe; dagegen fällt der Wellenzug jetzt in die Richtung der Y-Axe. Weil die Schwingungsrichtung senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung der Welle steht, wird die Welle als Transversalwelle bezeichnet. Für die Constanten A , λ und τ gelten dieselben Bemerkungen wie vorher;

namentlich ist auch hier immer noch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v

$$v = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\tau}.$$

Wir überzeugen uns, ob der Ansatz (301) die Gleichungen (297) erfüllt. Für e erhalten wir hier

$$e = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0.$$

Die Transversalwellen haben also die Eigenthümlichkeit, dass sie ohne Aenderung des specifischen Volumens vor sich gehen. Die longitudinalen Wellen werden daher im Gegensatze zu ihnen auch als Compressionswellen bezeichnet. Ein unzusammen-drückbarer Körper, wie man sich bei der Elasticitätstheorie des Lichts den Lichtäther dachte, kann daher wohl transversale, aber keine longitudinalen Wellen fortpflanzen. Damit stimmte überein, dass das Licht aus den Polarisationserscheinungen als transversale Wellenbewegung erkannt wurde. Im Sinne dieser älteren theoretischen Optik beschrieben die Gleichungen (301) einen einfarbigen, eben polarisirten Lichtstrahl; einfarbig, weil nur Schwingungen von derselben Wellenlänge λ vorkommen und eben polarisirt, weil die Schwingungen nur in der Richtung der X -Axe oder, wie man auch sagen kann, in der XY -Ebene erfolgen. Als Polarisationssebene wurde nach der Theorie von Fresnel die XZ -Ebene, nach der Neumannschen dagegen die XY -Ebene selbst angesehen. Mit Rücksicht auf $e = 0$ vereinfachen sich für die Transversalwellen die Gleichungen (297) zu

$$\nabla^2 \xi = \frac{\mu}{G} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}; \quad \nabla^2 \eta = \frac{\mu}{G} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}; \quad \nabla^2 \zeta = \frac{\mu}{G} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \quad (302)$$

und diese bilden die Grundlage der theoretischen Optik und zwar nicht nur der älteren, sondern auch der neueren elektromagnetischen Lichttheorie. Merkwürdigerweise führt nämlich die letztgenannte Theorie von ganz verschiedenen Ausgangspunkten doch zu fast genau denselben Gleichungen wie die Elasticitätstheorie. Die Gleichungen (302) sind daher auch allgemein unter dem Namen der Wellengleichungen bekannt.

Durch den Ansatz (301) sind die beiden letzten der Wellengleichungen ohne Weiteres befriedigt. Für die in der ersten vorkommende Grösse $\nabla^2 \xi$ erhalten wir

$$\nabla^2 \xi = \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = -A \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \sin 2\pi \left(\frac{y}{\lambda} - \frac{t}{\tau} \right)$$

und ebenso

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -A \left(\frac{2\pi}{\tau} \right)^2 \sin 2\pi \left(\frac{y}{\lambda} - \frac{t}{\tau} \right).$$

Die Wellengleichungen sind also identisch erfüllt, wenn

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 = \frac{\mu}{G} \left(\frac{2\pi}{\tau} \right)^2$$

gesetzt wird und daraus folgt für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v_t der Transversalwellen

$$v_t = \sqrt{\frac{G}{\mu}}. \quad (303)$$

Diese ist also immer kleiner als die Fortpflanzung der Schallwellen. Flüssigkeiten können keine Transversalwellen, sondern nur longitudinale Wellen fortleiten; so kommt es, dass die Transversalschwingungen der gewöhnlichen festen elastischen Körper zu keinen Sinnesempfindungen Anlass geben, weil sie durch die Luft nicht zu den Sinnesorganen (also etwa zum Ohre) fortgepflanzt werden.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes ist der Grösse nach bekannt. Als man früher noch annahm, dass das Licht eine den Elasticitätsgesetzen gewöhnlicher fester Körper gehorchende Wellenbewegung des Lichtäthers sei, konnte man daher Gl. (303) benutzen, um die spezifische Masse des Aethers zu berechnen, vorausgesetzt, dass der Schubelastizitätsmodul G auf anderem Wege gefunden wurde. Zu einer Schätzung dieser Art gab es nun in der That einen Weg. Man weiss z. B., wie viel Energie bei klarem Wetter der Erde von der Sonne in der Secunde zugestrahlt wird. Diese Energie legt, ehe sie bei uns ankommt, den ganzen Weg zwischen Sonne und Erde zurück und ist in der Zwischenzeit theils als Formänderungsarbeit theils als lebendige Kraft im Aether aufgespeichert. Für die spezifische Formänderungsarbeit hat man

aber nach Gl. (45) $\frac{\tau^2}{2G}$, wofür auch $\frac{1}{2} G \gamma^2$ geschrieben werden kann. Sobald man daher die Winkeländerung γ zu messen oder wenigstens zu schätzen vermochte, konnte man auch die Grössen G und μ ableiten. Die hiernach vorgenommenen Schätzungen führten stets zu äusserst kleinen Werthen für die spezifische Masse des Aethers und man erblickte darin einen Grund für die Zulässigkeit der ganzen Theorie. Seit man den Zusammenhang der optischen mit den elektromagnetischen Erscheinungen erkannt und experimentell nachgewiesen hat, kommt indessen allen diesen Betrachtungen nur noch ein historischer Werth zu.

§ 65. Die Eindeutigkeit der Lösung des Problems.

Bei allen folgenden Untersuchungen nehme ich an, dass die Körper in Ruhe sind und dass das Eigengewicht jenes Körpers, dessen Spannungs- und Formänderungszustand untersucht werden soll, unerheblich gegenüber den Lasten ist, die an seiner Oberfläche auf ihn übertragen werden. Diese Lasten sind ausserdem überall als gegeben zu betrachten.

Man nehme nun an, dass irgend ein System von Verschiebungen $\xi\eta\xi$ vorgeschlagen sei, von dem sich nachweisen lässt, dass es die Grundgleichungen befriedigt. Diese Grundgleichungen selbst lassen sich hier übrigens mit Rücksicht auf die ausgesprochene Voraussetzung in der einfacheren Form

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \xi + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial x} &= 0 \\ \nabla^2 \eta + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial y} &= 0 \\ \nabla^2 \xi + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (304)$$

anschreiben. Wir wollen der kürzeren Ausdrucksweise wegen ein solches System von Verschiebungen, das diese Gleichungen befriedigt, ein mögliches nennen. Damit wird nur gesagt, dass dieses System nicht gegen die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen verstösst, die zwischen den Spannungen an jedem