Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

§. 63b. Ableitung der vorhergehenden Beziehungen auf anderem Wege.

urn:nbn:de:hbz:466:1-84594

§ 63b. Ableitung der vorhergehenden Beziehungen auf anderem Wege.

Wegen der Beliebtheit, deren sich die Methode von Castigliano heute bei vielen Technikern erfreut, glaube ich manchem Leser einen Gefallen zu erweisen, wenn ich den Gegenstand noch einmal, zwar in ähnlicher Art, aber doch von einem anderen Standpunkte her ins Auge fasse.

Ich denke mir innerhalb eines beliebig abgegrenzten Bezirks die Spannungscomponenten um $\delta\sigma_x$, $\delta\sigma_y$, $\delta\sigma_z$, $\delta\tau_{xy}$, $\delta\tau_{xz}$, $\delta\tau_{yz}$ variirt. An den Grenzflächen und ausserhalb des Bezirks sollen die Variationen gleich Null sein und im Innern sind sie als stetige Functionen des Ortes anzusehen, die sonst willkürlich sind, jedenfalls aber, damit der variirte Spannungszustand überhaupt bestehen kann, den 3 Gleichgewichtsbedingungen gegen Verschieben genügen müssen, von denen die erste

$$\frac{\partial\,\delta\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\,\delta\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\,\delta\tau_{zx}}{\partial z} = 0 \qquad (296^h)$$

lautet und die den Gleichungen (5) entsprechen. Wir kümmern uns bei der Wahl der Variationen des Spannungszustandes im Uebrigen nicht darum, wie dieselben etwa wirklich zu Stande gebracht werden könnten, da es uns nur darauf ankommt, den wirklich bestehenden Spannungszustand mit einem ihm unendlich benachbarten zu vergleichen, der nur den allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen an jedem Körperelemente ebenso zu entsprechen braucht, wie der andere, sonst aber willkürlich gewählt werden kann. Die durch die Componenten $\delta\sigma_x$ u. s. f. beschriebene Variation des Spannungszustandes kann auch als ein für sich bestehender Spannungszustand betrachtet werden, der unabhängig von dem anderen in dem Körper bestehen könnte, unter der Voraussetzung jedoch, dass gar keine äusseren Lasten an diesem angriffen. Käme er wirklich in dieser Form an dem Körper vor, so bildete er demnach ein System von „Eigenspannungen", von denen in § 65 noch weiter die Rede sein wird. Die Gleichungen (296^h) gehen dann unmittelbar aus den Gleichungen (5) hervor, sobald man diese auf den vorliegenden Spannungszustand anwendet. Im Uebrigen ist es jedoch für uns ganz gleichgültig, dass man die Spannungscomponenten $\delta\sigma_x$ u. s. f. als Eigenspannungen zu deuten hätte, da sie für uns nur die Bedeutung einer willkürlich erdachten Abänderung des wirklich vorhandenen Spannungszustandes haben.

Wir wollen abermals berechnen, wie gross die Aenderung δA

ist, die die Formänderungsarbeit durch die Variation des Spannungszustandes erfährt. Hierzu denken wir uns zuerst den Spannungszustand $\delta\sigma_x$ u. s. f. angebracht. Die diesem allein zugehörige Formänderungsarbeit ist unendlich klein von der zweiten Ordnung, da sowohl die Spannungscomponenten als die Formänderungen, die ihnen etwa entsprechen könnten, unendlich klein sind. Der hierdurch hervorgebrachte Unterschied in dem Werthe von A verschwindet daher gegen die nur von der ersten Ordnung unendlich kleine Arbeit, die von den Spannungscomponenten $\delta\sigma_x$ u. s. f. weiterhin geleistet wird, während die zu dem wirklichen Spannungszustande σ_x u. s. f. gehörigen Formänderungen ε_x u. s. f. eintreten. Diese Arbeit stellt daher auch allein den Betrag der Variation δA dar, wofür wir ähnlich wie in Gl. (296[a])

$$\begin{aligned}\delta A = \int dv\,[\varepsilon_x\delta\sigma_x + \varepsilon_y\delta\sigma_y + \varepsilon_z\delta\sigma_z \\ + \gamma_{xy}\delta\tau_{xy} + \gamma_{xz}\delta\tau_{xz} + \gamma_{yz}\delta\tau_{yz}]\end{aligned} \qquad (296^{i})$$

erhalten. Dass der Faktor $\frac{1}{2}$ diesmal fehlt, hat darin seinen Grund, dass die Spannungen, deren Arbeiten während der Formänderung zu berechnen sind, schon von Anfang an in voller Grösse vorhanden waren und nicht erst während und mit der Formänderung selbst anwuchsen.

Auch an diesen Ausdrücken nehmen wir eine partielle Integration vor. Wir beachten also, dass z. B. beim ersten Gliede

$$\varepsilon_x\delta\sigma_x = \frac{\partial\xi}{\partial x}\cdot\delta\sigma_x = \frac{\partial}{\partial x}(\xi\cdot\delta\sigma_x) - \xi\frac{\partial\delta\sigma_x}{\partial x}$$

ist und ähnlich bei den folgenden. Erstrecken wir nun die Integration in

$$\int dv\cdot\frac{\partial}{\partial x}(\xi\cdot\delta\sigma_x)$$

auf das ganze Gebiet, an dessen Grenzen $\delta\sigma_x$ überall Null ist, so folgt, wie im vorigen Paragraphen, dass dieses Integral verschwindet. Vom ersten Gliede in der Klammer der Gleichung (296[i]) bleibt daher nur der Beitrag

$$-\int dv\,\xi\frac{\partial\delta\sigma_x}{\partial x}$$

erhalten. Führt man dies bei allen Gliedern durch und beachtet, dass die γ durch je zwei Glieder (nach Gl. 286) darzustellen sind, so erhält man

$$\delta A = -\int dv \left[\xi \frac{\partial \delta \sigma_x}{\partial x} + \eta \frac{\partial \delta \sigma_y}{\partial y} + \zeta \frac{\partial \delta \sigma_z}{\partial z} + \xi \frac{\partial \delta \tau_{xy}}{\partial y} + \eta \frac{\partial \delta \tau_{xy}}{\partial x} \right.$$
$$\left. + \xi \frac{\partial \delta \tau_{xz}}{\partial z} + \zeta \frac{\partial \delta \tau_{xz}}{\partial x} + \eta \frac{\partial \delta \tau_{yz}}{\partial z} + \zeta \frac{\partial \delta \tau_{yz}}{\partial y} \right]. \quad (296^k)$$

Sobald man aber die zu gleichen Faktoren ξ, η oder ζ gehörigen Glieder zusammenzieht, erkennt man, dass sie sich nach den Gleichgewichtsbedingungen (296^h) gegeneinander wegheben. Es bleibt daher

$$\delta A = 0. \quad (296^l)$$

Auch für den Fall, dass Aenderungen des Spannungszustandes von der hier betrachteten, rein willkürlichen Art in Aussicht genommen werden, zeigt sich daher, dass der wirkliche Spannungszustand die für ein Minimum der Formänderungsarbeit nothwendige Bedingung $\delta A = 0$ erfüllt. Ein Nachweis dafür, dass hierzu in Wirklichkeit ein Minimum (und nicht ein Maximum) von A gehört, ist nicht erforderlich, da man von dem Satze ohnehin stets nur in der Form $\delta A = 0$ Gebrauch macht.

Wesentlich ist dagegen auch hier wieder die Bedingung an den Grenzen. Wenn die Anwendung des Satzes auf einen bestimmten Theil eines Körpers zu keinen Fehlern führen soll, muss man darauf achten, dass die Variation des Spannungszustandes überall ausserhalb des betrachteten Gebiets und auch schon auf den Grenzflächen selbst gleich Null sein muss. Dagegen ist manchmal gefehlt worden.

Anmerkung. Wollte man etwa den Satz nicht in der hier unmittelbar gegebenen Form (also unter den gewählten Grenzbedingungen) anwenden, so wäre man zum Mindesten den Nachweis schuldig, dass trotz anders gewählter Voraussetzungen über die Variationen $\delta \sigma_x$ u. s. f. an den Grenzflächen jedenfalls die Summe der Integrale von der Form

$$\int dv \frac{\partial}{\partial x} (\xi \cdot \delta \sigma_x)$$

über das betrachtete Gebiet erstreckt zu Null würde. Das ist aber dann nur für eine bestimmte Annahme über die $\delta \sigma_x$ und nicht allgemein möglich. In der That ist daher die allgemeine Aussage des Satzes an jene Grenzbedingungen als nothwendige Voraussetzung gebunden.