Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

Desgl. für die Normalspannungen.

Wenn wir sie addiren und für die Summe der specifischen Dehnungen die specifische Volumenänderung e einführen, erhalten wir daraus

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \frac{m}{m-2} E e. \tag{290}$$

Die erste der vorausgehenden Gleichungen lässt sich aber schreiben

$$E \varepsilon_x = \frac{m+1}{m} \sigma_x - \frac{1}{m}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{m+1}{m} \sigma_x - \frac{E e}{m-2}$$

und deren Auflösung nach σ_x liefert

$$\sigma_x = \frac{mE}{m+1}\left(\varepsilon_x + \frac{e}{m-2}\right). \tag{291}$$

Man kann diesen Ausdruck noch etwas vereinfachen, wenn man sich erinnert, dass nach Gl. (34)

$$G = \frac{mE}{2(m+1)}$$

gesetzt werden kann. — Die Gl. (289) waren für σ_x σ_y σ_z ganz symmetrisch gebaut; wir können daher die Lösung (291) ohne weitere Bemühungen sofort auch auf die beiden anderen Unbekannten σ_y und σ_z übertragen. Mit Benutzung der angeführten Vereinfachung und mit Rücksicht auf die Gl. (285) erhalten wir daher die Ausdrücke für die Normalspannungscomponenten

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= 2G\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{e}{m-2}\right)\\
\sigma_y &= 2G\left(\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{e}{m-2}\right)\\
\sigma_z &= 2G\left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{e}{m-2}\right)
\end{aligned}\right\}. \tag{292}$$

Damit ist die Aufgabe, die wir uns zunächst gestellt hatten, gelöst. Wir haben jetzt die unbekannten Spannungscomponenten auf nur noch drei unbekannte Grössen ξ η ζ zurückgeführt und es bleibt uns nur noch übrig, diese Ausdrücke in die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen, die durch die Gl. (5) ausgesprochen werden, einzusetzen.

Die Gl. (5) lauteten

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0,$$

$$\frac{d \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z = 0.$$

Durch Einsetzen der durch die Gl. (288) und (292) gegebenen Werthe geht die erste von ihnen über in

$$2G\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{1}{m-2}\frac{\partial e}{\partial x}\right) + G\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}\right)$$

$$+ G\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial z}\right) + X = 0.$$

Um diese auf eine übersichtlichere Form zu bringen, nehmen wir noch einige kleine Aenderungen mit ihr vor. Zunächst erhält man durch Division mit G und etwas geänderte Zusammenfassung der einzelnen Glieder

$$\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial z}\right) + \frac{2}{m-2}\frac{\partial e}{\partial x} + \frac{X}{G} = 0.$$

Für die drei in der ersten Klammer zusammengefassten Glieder benutzen wir eine in der mathematischen Physik sehr häufig gebrauchte Bezeichnung. Es macht sich nämlich fast in allen physikalischen Theorien nöthig, von den unbekannten Functionen, die in ihnen auftreten, die Summe der drei zweiten Differentialquotienten nach den drei Axenrichtungen zu nehmen. Zuerst geschah dies in der Potentialtheorie von Laplace. Man bezeichnet daher die Rechenvorschrift, die Summe dieser drei zweiten Differentialquotienten nach den Axenrichtungen zu bilden, als die Laplace'sche Operation. Um diese Rechenvorschrift anzugeben, setzen wir vor die Function, auf die sie Anwendung finden soll, das Zeichen ∇^2. Oft wird dafür auch nur einfach Δ geschrieben; wegen des Zusammenhangs mit anderen Lehren, auf die es hier nicht weiter ankommt, entscheide ich mich aber für das zuerst genannte

Zeichen. Um kurz anzudeuten, was ich eben ausführlicher auseinandersetzte, kann man

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{293}$$

schreiben. Natürlich ist dies in solcher Form noch keine Gleichung im eigentlichen Sinne; man hat vielmehr in Gedanken überall hinter die Operationszeichen die Veränderlichen zu setzen, auf die sich die Operationen beziehen sollen.

Ich komme jetzt zu den in der zweiten Klammer zusammengefassten Gliedern der vorausgehenden Gleichung. Jedes dieser Glieder ist ein Differentialquotient nach x und ihre Summe kann daher gleich

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right) \text{ oder gleich } \frac{\partial e}{\partial x}$$

gesetzt werden. Diese Summe kann daher mit dem nächstfolgenden Gliede der Gleichung zusammengefasst werden. Hiermit nimmt die Gleichung, die die Gleichgewichtsbedingung zwischen den Spannungen gegen ein Verschieben nach der X-Richtung ausspricht, die übersichtlichere Form an

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 \xi + \frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial x} + \frac{X}{G} &= 0, \\ \nabla^2 \eta + \frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial y} + \frac{Y}{G} &= 0, \\ \nabla^2 \zeta + \frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial z} + \frac{Z}{G} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{294}$$

Ich habe sofort die für die beiden anderen Coordinatenrichtungen geltenden Gleichungen hinzugefügt, die genau auf dieselbe Weise gefunden werden wie die erste.

Die Gl. (294) bilden die Ausgangsgleichungen für alle ferneren Untersuchungen der mathematischen Elasticitätstheorie. Ich möchte noch einmal betonen, dass sie nichts anderes sind, als die Gleichgewichtsbedingungen gegen Verschieben, die früher in den Gl. (5) ihren Ausdruck gefunden hatten. In der neuen Form sieht man den Gl. (294) ihre physikalische Bedeutung nicht so leicht an; es ist aber durchaus nöthig, dass man sich diesen Sinn der Gleichungen stets vor Augen hält und es ist