Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

Berechnung der specifischen Dehnungen aus den Verschiebungen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-84594

im Vergleiche zu den Abmessungen des Körpers im natürlichen Zustande, also gegenüber den Coordinaten $x\ y\ z$, betrachtet werden, wie es ja den thatsächlichen Verhältnissen gewöhnlich entspricht. Wir wollen zunächst die specifischen Dehnungen $\varepsilon_x\ \varepsilon_y\ \varepsilon_z$ in den Richtungen der Coordinatenaxen ausdrücken. Zu diesem Zwecke betrachten wir zwei Punkte, die ursprünglich um dx auseinander lagen. Die Coordinaten dieser beiden Punkte im natürlichen Zustande sollen also

$$x,\ y,\ z \quad \text{und} \quad x + dx,\ y,\ z$$

gewesen sein. Nach der Formänderung gehen sie über in

$$x + \xi,\ y + \eta,\ z + \zeta$$

und

$$x + dx + \xi + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx,\quad y + \eta + \frac{\partial \eta}{\partial x} dx,\quad z + \zeta + \frac{\partial \zeta}{\partial x} dx,$$

wobei darauf zu achten war, dass sich $\xi\ \eta\ \zeta$ um die angegebenen Differentiale ändern, wenn man zum Nachbarpunkte weiter rückt.

Aus der Strecke dx ist also durch die Formänderung die Strecke $dx + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx$ geworden. Unter Benutzung unserer früheren Schreibweise haben wir also für die elastische Aenderung Δdx der Strecke dx

$$\Delta dx = \frac{\partial \xi}{\partial x} dx.$$

Die specifische Dehnung ε_x ist aber das Verhältniss zwischen Δdx und der ursprünglichen Länge dx, also finden wir die erste der drei folgenden Gleichungen

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \xi}{\partial x},\quad \varepsilon_y = \frac{\partial \eta}{\partial y},\quad \varepsilon_z = \frac{\partial \zeta}{\partial z}. \tag{285}$$

Die beiden anderen folgen auf demselben Wege, wenn man die Schicksale einer in der Richtung der Y-Axe gezogenen Strecke dy oder einer in der Richtung der Z-Axe gezogenen Strecke dz verfolgt.

Eine ganz ähnliche Betrachtung liefert uns auch den Ausdruck für die kleine elastische Aenderung γ_{xy}, die der ursprünglich rechte Winkel zwischen zwei Strecken dx und dy erfährt, die von dem Punkte xyz in den Richtungen der

X- und der Y-Axe gezogen wurden. Um die Grösse dieses Winkels nach der Formänderung mit der ursprünglichen zu vergleichen, denke ich mir den einen Winkel parallel verschoben, so dass beide Scheitel zusammenfallen. So sind sie in Abb. 70 gezeichnet. Wir brauchen dabei nur auf die kleinen Abweichungen jedes Schenkels in der Richtung des anderen Schenkels zu achten, denn wenn auch ein Schenkel in einer Richtung senkrecht zur Ebene der Abb. 70 ein wenig abgelenkt wird, so trägt dies zur Winkeländerung nichts bei; eine solche Ablenkung, die etwa der in der Richtung der X-Axe verlaufende Schenkel erfährt, kommt nämlich auf eine Drehung des Winkels um die Y-Axe hinaus, die zu keiner Aenderung der Grösse des Winkels führt. Auch die specifische Dehnung in der Richtung der X-Axe kann keinen Beitrag zur Winkeländerung γ_{xy} liefern. Wir brauchen also nur darauf zu achten, dass sich der Endpunkt der Strecke dx relativ zum Anfangspunkte um eine kleine Strecke in der Richtung der Y-Axe verschoben hat, die wir schon vorher zu $\frac{\partial \eta}{\partial x} dx$ berechnet haben und dass sich ebenso der Endpunkt von dy um $\frac{\partial \xi}{\partial y} dy$ gegen den Winkelscheitel in der Richtung der X-Axe verschoben hat. Die Beträge beider Ablenkungen sind in Abb. 70 eingeschrieben. Zugleich sehen wir noch, dass der ursprünglich rechte Winkel in einen spitzen übergeht, wenn beide Differentialquotienten positiv sind.

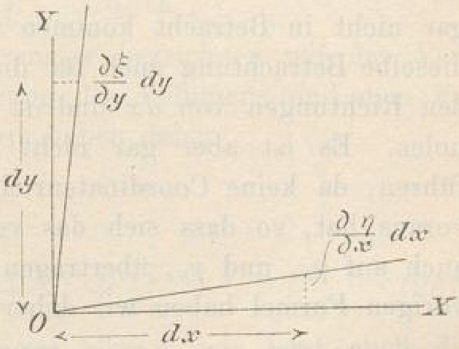

Abb. 70.

Die Richtungsänderungen sind sehr klein; wir können daher die zugehörigen Winkel in Bogenmaass gleich ihren trigonometrischen Tangenten setzen. Die Richtungsänderung von dx trägt daher $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ zu γ_{xy} bei und ähnlich ist es mit dy. Im Ganzen haben wir daher