



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Vorlesungen über technische Mechanik**

**Föppl, August**

**Leipzig, 1900**

§. 62. Ausknicken einer auf Verdrehung beanspruchten langen Welle.

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-84594](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-84594)

§ 62. Ausknicken einer auf Verdrehung beanspruchten langen Welle.

Von allen Fällen des labilen elastischen Gleichgewichts ist der seither behandelte der gewöhnlichen Knickfestigkeit praktisch zwar weitaus der wichtigste. Daneben kommen aber auch noch andere vor und schon in § 49 wurde ein solcher behandelt. Hier soll noch der zuerst von Greenhill untersuchte Fall des labilen elastischen Gleichgewichts einer auf Verdrehung beanspruchten langen dünnen Welle von kreisförmigem Querschnitte besprochen werden. Wenn eine solche Welle hinreichend lang im Vergleiche zu ihrem Durchmesser ist, befindet sie sich nämlich im geraden Zustande im labilen Gleichgewichte, grade so wie ein auf Druck beanspruchter sehr schlanker Stab. Sobald durch zufällige Umstände die geringste Abweichung der Mittellinie von einer Geraden veranlasst wird, steigert sich die Abweichung unausgesetzt, bis sie zum Bruche führt; wir können diese Erscheinung ebenfalls als ein Ausknicken bezeichnen.

Die Sache selbst kennt wohl Jedermann aus der alltäglichen Erfahrung, zwar nicht aus der Erfahrung an eigentlichen Wellenleitungen, bei denen sie nur in ganz ausnahmsweisen Fällen vorliegen könnte, wohl aber aus der Erfahrung mit einem dünnen Faden oder auch mit einem dünnen Drahte. Wenn ein Faden an beiden Enden festgehalten und dann verwunden wird, beginnt er, wenn die Verwindung hinreichend weit vorgeschritten ist, seitlich auszuweichen und sich spiralig aufzurollen. Man macht davon Gebrauch, wenn man den langen Faden zu einem doppelten von der halben Länge zusammenlegen will. Die beiden Theile, die man zusammenlegt, wickeln sich dann ohne weiteren Zwang in Schraubenlinien umeinander und bilden dadurch nachher ein gut zusammenhängendes Ganzes. Auch Metalldrähte, die man bei Festigkeitsprüfungen auf Verwinden beansprucht, brechen sehr häufig nicht einfach durch Versagen der Torsionsfestigkeit, sondern erst nach vorausgehendem Ausknicken, d. h. nach einer Formänderung,

bei der die Mittellinie in eine langgestreckte Schraubenlinie übergeht.

Zur Untersuchung dieser Erscheinung kann man ähnlich verfahren, wie in § 59 bei der Erörterung besonderer Fälle der gewöhnlichen Knickfestigkeit. Man sehe zu, wie gross das verwindende Moment  $M$  sein muss, um eine Ausbauchung, die als bereits vorhanden vorausgesetzt wird, gerade aufrecht zu erhalten. Bei einem kleineren Werthe von  $M$  wird sich die Mittellinie der Welle von selbst wieder gerade strecken und bei jedem grösseren Werthe wird die Ausbauchung weiter fortschreiten. Das gefundene  $M$  stellt also die kritische Verdrehungsbelastung der Welle dar.

In Abb. 68 ist in axonometrischer Zeichnung die Schraubenlinie angegeben, in die die Mittellinie der Welle übergegangen sein mag. Zur besseren Orientirung ist auch der Cylinder angedeutet, auf dem

die Schraubenlinie liegt. Der Querschnitt der Welle ist dagegen weggelassen; mit dem gezeichneten Cylinder hat daher der Umriss der

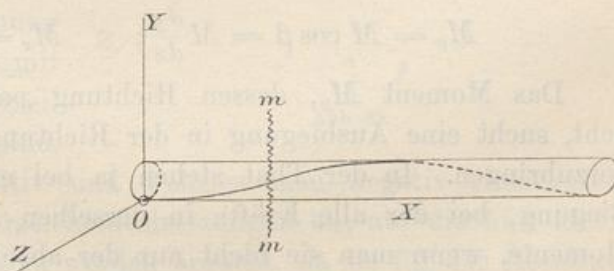


Abb. 68.

Welle selbst nichts gemein. Die anfängliche Lage der Wellenmittellinie im unverdrehten Zustande möge mit der Erzeugenden  $X$  des Cylinders zusammenfallen; dass sie überhaupt mit einer Cylindererzeugenden zusammenfallen muss, folgt daraus, dass die Enden der Wellenmittellinie gegen eine seitliche Ausweichung gestützt sind.

Man lege irgend einen Querschnitt  $mm$  durch die Welle und bringe daran das verdrehende Moment  $M$  an. Dieses Moment ist eine gerichtete Grösse, die parallel zur  $X$ -Axe geht. Wir zerlegen es in zwei Componenten, von denen die eine in die Richtung der Tangente an die Schraubenlinie fällt und die zweite senkrecht dazu steht. Die erste Componente entspricht

den Torsionsspannungen im Querschnitte der Welle und die zweite hält bei passender Grösse die Biegung der Wellenmittellinie aufrecht.

Rechtwinklig zur  $X$ -Axe seien noch zwei Coordinaten-Axen der  $y$  und  $z$  angenommen. Die Winkel, die die Tangente an die Schraubenlinie mit den Coordinatenrichtungen bildet, seien mit  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  bezeichnet. Dann ist genau genug  $\cos \alpha = 1$ , dagegen

$$\cos \beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos \gamma = \frac{dz}{ds}.$$

Hier sind unter  $y$ ,  $z$  Coordinaten eines Punktes der Wellenmittellinie und unter  $ds$  ein Längenelement dieser Linie zu verstehen. Zerlegt man jetzt das ganze, in der Richtung der  $X$ -Axe gehende Verdrehungsmoment  $M$  in drei Componenten, von denen eine in die Richtung von  $ds$  und die anderen in die Richtungen der  $Y$ - und  $Z$ -Axe fallen, so hat man für letztere

$$M_y = M \cos \beta = M \frac{dy}{ds}; \quad M_z = M \frac{dz}{ds}.$$

Das Moment  $M_y$ , dessen Richtung parallel zur  $Y$ -Axe geht, sucht eine Ausbiegung in der Richtung der  $Z$ -Axe hervorzubringen. In der That stehen ja bei einer gewöhnlichen Biegung, bei der alle Kräfte in derselben Ebene liegen, die Momente, wenn man sie nicht nur der absoluten Grösse nach betrachtet, sondern sie als gerichtete Grössen auffasst, alle senkrecht zur Belastungs- oder zur Biegungsebene. So ist es auch hier und die doppelte Krümmung der elastischen Linie wird durch das Zusammenwirken von  $M_y$  und  $M_z$  veranlasst. Nach dem Superpositionsgesetze können wir die Wirkungen von  $M_y$  und  $M_z$  gesondert betrachten und beide nachträglich zusammensetzen. Für die Wirkung von  $M_y$  für sich gilt die Differentialgleichung der elastischen Linie in der Form

$$E \Theta \frac{d^2 z}{dx^2} = - M_y = - M \frac{dy}{ds}$$

und dazu kommt noch für die andere Ausbiegungsrichtung die Gleichung

$$E \Theta \frac{d^2 y}{dx^2} = - M \frac{dz}{ds}.$$

Die Vorzeichen in diesen beiden Gleichungen sind indessen noch zweifelhaft und bedürfen einer besonderen Untersuchung. Angenommen,  $y, z, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$  seien an der betrachteten Stelle alle positiv und ebenso  $M_y, M_z$ . Wenn dann  $M_y$  einer Drehung im Sinne des Uhrzeigers, also in der Richtung von der X- zur Z-Axe entspricht (vgl. Abb. 69), trifft dies auch für  $M_z$  zu, die Drehung geht also hier von der Y- zur X-Axe. Auf die X-Axe bezogen, gehen daher beide Drehungen in verschiedener Richtung. Daraus folgt, dass bei gleichen Vorzeichen von  $M_y$  und  $M_z$  beide in die Differential - Gleichung der elastischen Linie mit verschiedenen Vorzeichen einzuführen sind.

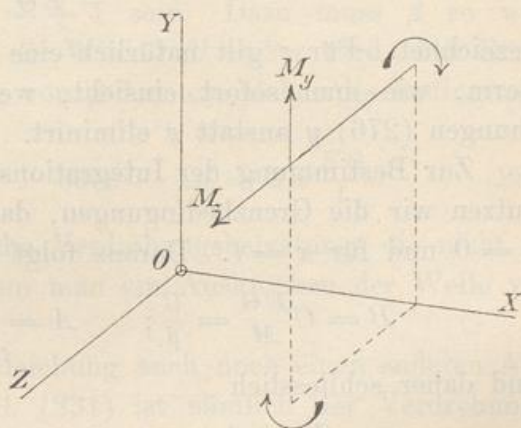


Abb. 69.

Welches man positiv und welches man negativ einzusetzen hat, hängt von Vorzeichenfestsetzungen ab, auf die hier nicht weiter eingegangen zu werden braucht, da sie für das Resultat, das ich hier ableiten will, gleichgültig sind.

Schreibt man noch  $dx$  an Stelle von  $ds$ , so gehen jetzt die vorigen Gleichungen in die genauere Form

$$\left. \begin{aligned} E\Theta \frac{d^2 z}{dx^2} &= \pm M \frac{dy}{dx} \\ E\Theta \frac{d^2 y}{dx^2} &= \mp M \frac{dz}{dx} \end{aligned} \right\} \quad (276)$$

über. Die erste liefert nach Integration

$$\frac{dz}{dx} = \pm \frac{M}{E\Theta} y \pm C$$

und dies setze ich in die zweite Gleichung ein. Diese geht dadurch über in

$$E\Theta \frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{M^2}{E\Theta} y - CM. \quad (277)$$

Die Lösung dieser Gleichung, die ganz der Euler'schen Gleichung für den Fall der gewöhnlichen Knickfestigkeit entspricht, lautet

$$y = A \sin \beta x + B \cos \beta x - C \frac{E \Theta}{M}, \quad (278)$$

wenn man mit  $\beta$  zur Abkürzung den Werth

$$\beta = \pm \frac{M}{E \Theta} \quad (279)$$

bezeichnet. Für  $z$  gilt natürlich eine Gleichung von derselben Form, wie man sofort einsieht, wenn man aus den Gleichungen (276)  $y$  anstatt  $z$  eliminirt.

Zur Bestimmung der Integrationsconstanten  $A$  und  $B$  benutzen wir die Grenzbedingungen, dass  $y = 0$  sein muss für  $x = 0$  und für  $x = l$ . Daraus folgt

$$B = C \frac{E \Theta}{M} = \frac{C}{\beta}; \quad A = \frac{C}{\beta} \cdot \frac{1 - \cos \beta l}{\sin \beta l}$$

und daher schliesslich

$$y = \frac{C}{\beta} \left\{ \frac{\sin \beta x}{\sin \beta l} (1 - \cos \beta l) + \cos \beta x - 1 \right\}. \quad (280)$$

Die Integrations-Constante  $C$  bleibt zunächst noch unbekannt. Wir differentiiren jetzt  $y$  zweimal und setzen den zweiten Differentialquotienten in die zweite der Gleichungen (276) ein, um  $z$  zu erhalten. Wir finden

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - C \beta \left\{ \frac{\sin \beta x}{\sin \beta l} (1 - \cos \beta l) + \cos \beta x \right\} = - \beta \frac{dz}{dx}$$

und daher nach einmaliger Integration

$$z = \frac{C}{\beta} \left\{ \frac{\cos \beta x}{\cos \beta l} (\cos \beta l - 1) + \sin \beta x \right\} + K. \quad (281)$$

Auch  $z$  muss für  $x = 0$  und für  $x = l$  verschwinden. Die erste Bedingung liefert die neue Integrations-Constante  $K$

$$K = \frac{C}{\beta} \frac{1 - \cos \beta l}{\sin \beta l},$$

so dass  $z$  übergeht in

$$z = \frac{C}{\beta} \left\{ \frac{(1 - \cos \beta x)(1 - \cos \beta l)}{\sin \beta l} + \sin \beta x \right\}. \quad (282)$$

Die andere Grenzbedingung dagegen lehrt, dass zur Aufrechterhaltung des angenommenen Gleichgewichtszustandes ohne Rücksicht auf die Grösse von  $C$ , d. h. auf die Grösse der Ausbiegung

$$(1 - \cos \beta l)^2 + \sin^2 \beta l = 0$$

sein muss. Damit eine Summe von zwei Quadraten verschwinde, muss jedes Quadrat für sich verschwinden, also muss  $\sin \beta l = 0$  und  $\cos \beta l = +1$  sein. Dazu muss  $\beta$  so weit angewachsen sein, dass der Winkel  $\beta l = 2\pi$  wird. Mit Rücksicht auf die Bedeutung von  $\beta$  hat man daher die Bedingungs-  
gleichung

$$\frac{Ml}{E\Theta} = 2\pi \quad \text{oder} \quad M = 2\pi \frac{E\Theta}{l}. \quad (283)$$

Das ist die kritische Verdrehungsbelastung, die nicht erreicht werden darf, wenn man ein Ausknicken der Welle vermeiden will.

Man kann dieser Gleichung auch noch einen anderen Ausdruck geben. Nach Gl. (231) ist nämlich der Verdrehungswinkel  $\Delta\varphi$ , der durch das Moment  $M$  veranlasst wird,

$$\Delta\varphi = \frac{2Ml}{\pi a^4 G} = \frac{Ml}{2\Theta G}.$$

Setzt man in diese Gleichung den kritischen Werth von  $M$  aus Gl. (283) ein, so erhält man

$$\Delta\varphi = \pi \frac{E}{G}. \quad (284)$$

Also erst dann, wenn der Verdrehungswinkel etwas mehr als eine Umdrehung beträgt, kann nach dieser Formel ein Ausknicken eintreten. Bei Stahlwellen müsste daher die Länge etwa das 3000fache des Durchmessers betragen, wenn das Ausknicken früher als die Ueberwindung der gewöhnlichen Torsionsfestigkeit eintreten sollte. Indessen ist zu beachten, dass hierbei noch keine Rücksicht auf die schon vorher vorhandenen zufälligen Abweichungen der Wellenmittellinie von einer Geraden u. s. w. genommen ist. Durch solche zufällige Umstände und ferner durch die Ueberschreitung der Elastizitätsgrenze kann die kritische Länge, von der ab das Aus-

knicken beginnt, ganz bedeutend herabgesetzt werden. Auch in dieser Hinsicht gleicht der Fall vollständig dem der gewöhnlichen Knickfestigkeit. Da die hier besprochenen Knickerscheinungen praktisch minder wichtig sind, soll indessen von einem weiteren Eingehen darauf abgesehen werden.

### Aufgaben.

45. Aufgabe. Bei welchem Verhältnisse der Querschnittsseite  $a$  zur Länge  $l$  beginnt die Knickgefahr für einen quadratischen Stab nach der Euler'schen Formel?

Lösung. Man setze

$$\frac{\pi^2 E \Theta}{l^2} = F \sigma$$

und verstehe unter  $\sigma$  die Proportionalitätsgrenze für Druck. Da  $\Theta = \frac{a^4}{12}$  und  $F = a^2$  ist, erhält man durch Auflösung der Gleichung nach  $l$

$$l = a\pi \sqrt{\frac{E}{12\sigma}}$$

Wenn z. B. für Flusseisen  $E = 2100000$ ,  $\sigma = 2000$  atm. gesetzt wird, liefert dies

$$\frac{l}{a} = 29,4.$$

Bei der Ableitung ist vorausgesetzt, dass die Stabenden frei drehbar sind. — Bei einem kleineren Längenverhältnisse ist indessen die bloße Berechnung auf gleichförmig vertheilte Druckbelastung immer noch bedenklich und man thut dann besser, die Tetmajer'sche Formel anzuwenden. — Ganz ähnlich ist natürlich bei anderen Querschnittsformen zu verfahren.

46. Aufgabe. Wie gross ist die Last, die eine gusseiserne Säule von 20 cm äusserem Durchmesser und 2 cm Wandstärke bei 6 m Höhe a) nach der Euler'schen, b) nach der Schwarz'schen Formel mit Sicherheit tragen kann, wenn  $E = 1000000$  atm,  $\sigma_{zul} = 700$  atm,  $\alpha = 0,0002$  gesetzt wird?

Lösung. Die Querschnittsfläche  $F$  ist

$$F = \pi(10^2 - 8^2) = 113 \text{ cm}^2.$$

Das Trägheitsmoment  $\Theta$  ist

$$\Theta = \frac{\pi}{4}(10^4 - 8^4) = 4630 \text{ cm}^4 \quad \text{und} \quad t^2 = \frac{4630}{113} = 41 \text{ cm}^2.$$

Bei Anwendung der Euler'schen Formel setzen wir voraus, dass das obere Ende der Säule durch das Gebälk, das sie trägt, gegen eine Verschiebung in horizontaler Richtung gestützt sei. Gewöhnlich wird dies zutreffen; natürlich ist aber im gegebenen Falle sorgfältig darüber nachzudenken, ob die Voraussetzung wirklich berechtigt ist. Sonst ist die doppelte Länge in die Formel einzuführen. Dagegen sehen wir von der Berücksichtigung einer etwaigen Einspannung der Enden der Sicherheit wegen ab. Die Knicklast wird dann nach der Euler'schen Formel

$$P_E = \pi^2 \frac{E \Theta}{l^2} = 10 \cdot \frac{10^6 \cdot 4630}{600^2} = 128600 \text{ kg.}$$

Man pflegt bei Gusseisen eine 6-fache Sicherheit gegen Ausknicken zu verlangen, daher setzen wir

$$P_{zul} = \frac{1}{6} P_E = 21400 \text{ kg.}$$

Nach der Schwarz'schen Formel wird dagegen

$$P_{zul} = \frac{F \cdot \sigma_{zul}}{1 + \alpha \frac{l^2}{t^2}} = \frac{113 \cdot 700}{1 + 2 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{600^2}{41}} = 28600 \text{ kg.}$$

Ich selbst würde dem ersten Resultate den Vorzug geben, hätte aber auch gegen die Belastung mit 28600 kg nicht viel einzuwenden, da der Sicherheitsgrad im ersten Falle ziemlich willkürlich eingeschätzt ist.

*47. Aufgabe.* Ein aufrecht stehender Stab ist am unteren Ende fest eingespannt. Das obere Ende ist frei drehbar und kann sich zugleich in horizontaler Richtung etwas verschieben. Dabei soll aber ein elastischer Widerstand auftreten, der der Grösse der Ausweichung proportional ist. Man denke sich etwa das obere Ende durch horizontale Zugstangen gehalten, die bei einer Ausweichung des Befestigungspunktes in Spannung gerathen. Man soll die Knickfestigkeit des Stabes berechnen.

*Lösung.* Die Ausweichung des oberen Endes sei  $y_0$  und von diesem Ende aus seien die Abscissen  $x$  gerechnet. Dann tritt hier eine horizontale Kraft  $H$  auf, die

$$H = cy_0$$

gesetzt werden kann. Der Faktor  $c$  hängt von der Elasticität der Zugstangen ab, die das obere Ende halten und ist hier als gegeben zu betrachten. Für den Querschnitt mit der Abscisse  $x$  hat man

$$M = Hx + P(y - y_0)$$

und die Gleichung der elastischen Linie lautet

$$E\Theta \frac{d^2 y}{dx^2} = -cy_0x - Py + Py_0.$$

Die allgemeine Lösung ist

$$y = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x - \frac{c}{P} y_0 x + y_0,$$

wenn  $\alpha$  dieselbe Bedeutung wie früher hat. Für  $x = 0$  muss  $y = y_0$  sein; daraus folgt  $B = 0$ . Ferner ist für  $x = l$  sowohl  $y$  als  $\frac{dy}{dx}$  gleich Null. Dies liefert die Gleichungen

$$0 = A \sin \alpha l - \frac{c y_0 l}{P} + y_0,$$

$$0 = \alpha A \cos \alpha l - \frac{c y_0}{P}.$$

Löst man beide nach  $A$  auf, so erhält man

$$A = y_0 \cdot \frac{cl - P}{P \sin \alpha l}; \quad A = y_0 \cdot \frac{c}{P \alpha \cos \alpha l}.$$

Damit diese Gleichungen mit einander bestehen können, muss

$$\frac{cl - P}{\sin \alpha l} = \frac{c}{\alpha \cos \alpha l}$$

sein. In anderer Form lässt sich diese Bedingungsgleichung auch schreiben

$$\operatorname{tg} \alpha l = \alpha l - \frac{\alpha P}{c}$$

oder, wenn man  $P$  in  $\alpha$  ausdrückt,

$$\operatorname{tg} \alpha l = \alpha l - (\alpha l)^3 \cdot \frac{E\Theta}{cl^3}.$$

Die kleinste Wurzel dieser transcendenten Gleichung, die im einzelnen Falle durch Probieren aufzulösen ist, liefert  $\alpha l$  und hiermit die Knicklast  $P$ .

Setzt man  $c = \infty$ , so ist der Stab oben ganz festgehalten und wir kommen damit auf den schon in § 59 ausführlich behandelten Fall. Wenn umgekehrt  $c = 0$  gesetzt wird, ist das obere Stabende in horizontaler Richtung frei beweglich und die Gleichung geht über in  $\operatorname{tg} \alpha l = \pm \infty$ . Diese liefert die Lösung  $\alpha l = \frac{\pi}{2}$  und daher

$$P = \frac{\pi^2 E \Theta}{4 l^2},$$

wie auch schon in den Eingangssätzen von § 59 durch eine einfache Betrachtung festgestellt worden war.

48. Aufgabe. Der Querschnitt eines Stabes, der an beiden Enden in Spitzen gelagert ist, sei in der Mitte auf eine Strecke  $l'$ , die klein gegenüber der ganzen Stablänge ist, durch Einschnitte verschwächt, so dass das kleinste Trägheitsmoment des Querschnitts dadurch von  $\Theta$  auf  $\Theta'$  herabgesetzt wird. Man soll die Knickfestigkeit des verschwächten Stabes mit der des unverschwächten vergleichen.

Lösung. Der Winkel, um den sich die Endquerschnitte des kurzen mittleren Stückes bei gegebenem Bieugungsmomente gegen einander verdrehen, ist in dem Verhältnisse  $\frac{\Theta}{\Theta'}$  grösser, als wenn der Querschnitt unverändert durchginge. Man denke sich nun einen zweiten Stab von überall gleichem Trägheitsmomente  $\Theta$ , aber von etwas grösserer Länge, so nämlich, dass das Mittelstück von der Länge  $l'$  durch ein solches von der Länge  $l' + l''$  ersetzt ist, wenn

$$l'' = \frac{\Theta - \Theta'}{\Theta'} l'$$

genommen wird. Dann würden sich die Endquerschnitte des Mittelstückes dieses Stabes bei gegebenem Bieugungsmomente um denselben Winkel gegen einander verdrehen, wie beim verschwächten Stabe. Falls nun das Mittelstück an und für sich kurz ist, wird auch der Bieugungspfeil in der Mitte beim zweiten Falle nicht merklich grösser sein als im ersten Falle, wenn die Bieugungslinien in den äusseren Stababschnitten in beiden Fällen mit einander übereinstimmen. Man erkennt daraus, dass die Querschnittsverchwächung in der Mitte so wirkt, als wenn der Querschnitt unverändert geblieben, die Stablänge aber um den vorher berechneten Betrag  $l''$  vergrössert wäre. Danach kann die Knicklast leicht berechnet werden.

Zur Prüfung des hier erörterten Falles habe ich eine grössere Versuchsreihe angestellt, und durch die Versuchsergebnisse wurde ich erst zu der hier gegebenen Lösung geführt. Dabei zeigte sich indessen, wie auch von vornherein zu erwarten war, dass man für  $l'$  einen etwas grösseren Werth als die Länge einzusetzen hat, auf die sich die Verschwächung des Stabquerschnitts erstreckt. Auch in den unmittelbar an das Mittelstück angrenzenden Theilen des Stabes kann sich nämlich nicht sofort der volle Querschnitt wirksam erweisen; die an die Lücke angrenzenden Kanten müssen vielmehr ebenfalls zunächst noch spannungslos sein. Bei meinen

Versuchen zerknickte ich Winkeleisen, bei denen der Querschnitt durch beiderseitige Einschnitte von 2,5 bis 60 mm Länge (in der Richtung der Stabaxe gemessen) so geschwächt war, dass  $\Theta'$  nur  $\frac{1}{4}$  bis  $\frac{1}{5}$  von  $\Theta$  war. Dabei musste man die Einschnittlänge um 2 bis 4 cm vermehren, um die vorausgehende Rechnung in Uebereinstimmung mit den Versuchsergebnissen zu bringen.