UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

§. 60. Knicken bei gleichzeitiger Biegungsbelastung.

urn:nbn:de:hbz:466:1-84594

Visual Library

§ 60. Knicken bei gleichzeitiger Biegungsbelastung.

Der Stab möge in der Mitte eine Biegungslast Q tragen (vgl. Abb. 67). Für das Biegungsmoment im Querschnitte x erhält man

$$M = \frac{Q}{2}x + Py$$

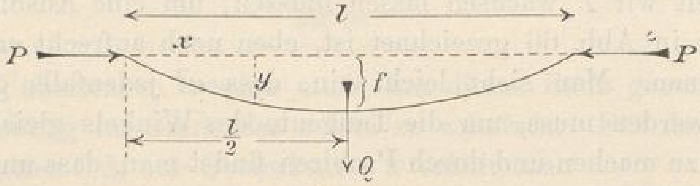

Abb. 67.

und hieraus

$$E\Theta\frac{d^2y}{dx^2} = -\left(\frac{Q}{2}x + Py\right),$$

$$y = A\sin\alpha x + B\cos\alpha x - \frac{Q}{2P}x.$$

Die elastische Linie zerfällt in zwei Aeste, die sich in der Mitte aneinanderschliessen. Für jeden Ast sind die Constanten A und B gesondert zu bestimmen; hier genügt es indessen der Symmetrie wegen, nur einen Ast näher ins Auge zu fassen. Wir wählen den linken; für $x = 0$ muss $y = 0$ und für $x = \frac{l}{2}$ muss $\frac{dy}{dx} = 0$ sein. Die erste Grenzbedingung liefert $B = 0$ und aus der zweiten folgt

$$A = \frac{Q}{2P\alpha\cos\frac{\alpha l}{2}}.$$

Setzt man dies in die Gleichung für y ein und wählt darin nachträglich $x = \frac{l}{2}$, um die grösste Ausweichung, nämlich den Biegungspfeil f zu erhalten, so wird

$$f = \frac{Q}{2P\alpha}\left\{\operatorname{tg}\frac{\alpha l}{2} - \frac{\alpha l}{2}\right\} \qquad (269)$$

Die Formel liefert einen unendlich grossen Werth für f, wenn $\frac{\alpha l}{2}$ zu einem rechten Winkel, αl also $= \pi$ und daher $P = \pi^2\frac{E\Theta}{l^2}$

wird. Die Biegungsbelastung ändert also in diesem Sinne nichts an der kritischen Belastung auf Zerknicken, die ebenso gross bleibt, als wenn Q nicht vorhanden wäre. Dieser Schluss ist aber mit Vorsicht aufzunehmen, denn er bezieht sich ja nur auf die rein elastischen Erscheinungen und nimmt auf die schon vor der Erreichung der kritischen Belastung eintretende Ueberschreitung der Proportionalitätsgrenze keine Rücksicht. So wie wir schon früher fanden, dass P_K wegen der Excentricität des Kraftangriffs u. s. f. kleiner ist als P_E, muss auch hier die wirkliche Knickbelastung kleiner ausfallen als der Euler'sche Werth und zwar um so mehr, je grösser Q ist.

Für die Spannung in einer Faser des mittleren Querschnitts erhält man bei Benutzung derselben Bezeichnungen wie bei der ähnlichen Untersuchung in § 58

$$\sigma = \frac{P}{F} \pm \left(\frac{Ql}{4} + Pf\right)\frac{a}{\Theta}.$$

In diese Gleichung ist f nach Gl. (269) einzuführen, ebenso für α der Werth einzusetzen und hierauf die Gleichung nach P aufzulösen, womit man ebenso wie in § 58 P_K erhält. Dabei tritt freilich die Schwierigkeit auf, dass die Gleichung transcendent ist; um darüber leichter hinweg zu kommen, ersetze ich Gl. (269) noch durch eine Näherungsformel, indem ich von der Reihenentwickelung

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \cdots$$

Gebrauch mache, die convergent ist bis $x = \frac{\pi}{2}$. Bei Festigkeitsberechnungen wird es sich meistens um Lasten handeln, die erheblich unter der Bruchbelastung bleiben, da man noch eine gewisse Sicherheit nöthig hat. Jedenfalls ist daher auch $\frac{\alpha l}{2}$ bei einem Falle der praktischen Anwendung erheblich kleiner als $\frac{\pi}{2}$ und selbst noch kleiner als die Einheit. In diesem Falle convergirt die Reihe ziemlich schnell und für eine Annäherung wird es genügen, die drei ersten Glieder zu berücksichtigen. Man erhält dann an Stelle von Gl. (269)

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

$$f = \frac{Q\alpha^2 l^3}{48P}\left(1 + \frac{\alpha^2 l^2}{10}\right)$$

oder, wenn man noch den Werth von α einsetzt,

$$f = \frac{Ql^3}{48E\Theta}\left(1 + \frac{Pl^2}{10E\Theta}\right). \tag{270}$$

Das erste Glied in der Klammer entspricht dem Biegungspfeile für $P = 0$ und stimmt auch in der That mit dem früher für die Biegungsbelastung Q gefundenen Pfeile (Gl. 82) genau überein. Schreiben wir für diesen Antheil, also auch für den Faktor vor der Klammer f_0 und beachten wir, dass im zweiten Gliede der Faktor 10 im Nenner nahezu mit π^2 übereinstimmt und dass sich dieses Glied daher in der Form $\frac{P}{P_E}$ schreiben lässt, so vereinfacht sich Gl. (270) noch weiter zu

$$f = f_0 \cdot \frac{P_E + P}{P_E}. \tag{271}$$

Die Gleichung für σ geht jetzt, nach Multiplikation mit F und mit $F\sigma = P_D$ über in

$$P_D = P + \left(\frac{Ql}{4} + P \cdot \frac{P_E + P}{P_E} f_0\right)\frac{aF}{\Theta}, \tag{272}$$

die ohne Weiteres nach P aufgelöst werden kann und damit P_K liefert. Solange P erheblich kleiner bleibt als P_E, erkennt man übrigens schon aus Gl. (271), dass der Biegungspfeil durch die Zufügung von P gegenüber f_0 nur wenig geändert wird. Daraus ist zu schliessen, dass die Biegungsspannungen auch nur ungefähr in demselben Verhältnisse wachsen, wozu dann freilich noch die gleichförmig über den Querschnitt vertheilte Belastung $\frac{P}{F}$ kommt.

Nach Auflösung der quadratischen Gleichung (272) nach P hat man übrigens für f_0 nachträglich wieder den Werth einzusetzen, für den es zur Abkürzung diente; von der weiteren Ausrechnung, die gar keine Schwierigkeiten mehr bietet, möge hier abgesehen werden.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Anmerkung. Eng verwandt mit dem hier besprochenen Falle ist ein anderer, der nicht ohne praktische Bedeutung ist und der vor Kurzem von Herrn M. Tolle ausführlich behandelt wurde (Zeitschr. d. V. D. Ing. 1897, S. 855). Man denke sich zunächst die Richtung der Kräfte P in Abb. 67 umgekehrt. Von einem Ausknicken kann dann zwar nicht mehr die Rede sein, da die Zugkraft P die durch die Biegungslast Q bewirkte Ausbiegung im Gegentheile zu verkleinern sucht. Dies hindert indessen nicht, dass die allgemeinen Betrachtungen zu Anfang des Paragraphen beibehalten werden können, falls man nur in den Formeln P überall negativ setzt.

Ferner denke man sich den Stab als eine dünne und lange Zugstange, etwa von kreisförmigem Querschnitte, die nur durch ihr Eigengewicht auf Biegung beansprucht wird. Auch dann kann man mit geringen Aenderungen die vorausgehenden Entwicklungen benutzen; man braucht nur das durch die Einzellast Q hervorgerufene Biegungsmoment durch das von der Eigenlast herrührende zu ersetzen. Schliesslich nehme man an, dass die Zugstange an beiden Enden festgehalten ist, so dass die zur Biegungslinie gehörige Bogensehne die unveränderliche Länge l behalten muss. Damit kommt man auf den von Tolle behandelten Fall; die zugehörige Biegungslinie wird von ihm als eine „steife Kettenlinie“ bezeichnet. Die Zugkraft P ist jetzt nicht mehr gegeben, sondern aus den Bedingungen der Aufgabe zu ermitteln. Die Lösung findet man natürlich im Wesentlichen auf dieselbe Art wie vorher, indem man zuerst die Differentialgleichung der elastischen Linie aufstellt, diese integrirt und die Integrationsconstanten den Grenzbedingungen gemäss bestimmt, wobei sich auch der Werth von P ergibt. Man kann aus dieser Betrachtung nützliche Schlüsse über die beste Anordnung solcher Zugstangen ziehen, worüber aber hier nur auf die Quelle verwiesen werden kann.

§ 61. Knickformel von Navier, Schwarz, Rankine.

Die Lehre von der Knickfestigkeit hat eigenthümliche Wandlungen durchgemacht; von allen Formeln der Festigkeitslehre, die wir heute als richtig anerkennen, ist die Euler'sche Knickformel eine der ältesten. Zu dieser Anerkennung, dass sie wirklich richtig ist, d. h. dass sie mit den Thatsachen hinreichend genau in Uebereinstimmung steht, ist sie aber erst seit verhältnissmässig kurzer Zeit gelangt und selbst heute fehlt es ihr daran noch in manchen Kreisen.