Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

Auf einer Seite eingespannter, auf der anderen drehbar befestigter Stab.

urn:nbn:de:hbz:466:1-84594

Endlich sei jetzt noch der Fall untersucht, dass der Stab nur am einen Ende als eingespannt, am anderen aber als frei drehbar befestigt angenommen werden kann. Die Untersuchung ist ganz ähnlich der vorigen. Man muss beachten, dass an dem drehbar befestigten Ende auch eine quer zur Stabaxe gerichtete

Abb. 66.

Kraft V übertragen werden muss, um dieses Ende gegen eine Verschiebung im Sinne der y-Axe zu schützen. Für das Biegungsmoment M im Querschnitte x erhält man

$$M = Py - Vx,$$

woraus der Reihe nach folgt

$$E\Theta \frac{d^2y}{dx^2} = -Py + Vx,$$

$$y = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x + \frac{V}{P} x,$$

wenn α die frühere Bedeutung hat. Wegen $y = 0$ für $x = 0$ folgt $B = 0$ und wegen $y = 0$ für $x = l$

$$A = -\frac{Vl}{P \sin \alpha l}.$$

Damit sind die Integrationsconstanten bestimmt. Dagegen ist V noch unbekannt, während zugleich noch die Grenzbedingung $\frac{dy}{dx} = 0$ für $x = l$ zur Verfügung steht. Mit $B = 0$ hat man durch Differentiiren

$$\frac{dy}{dx} = A\alpha \cos \alpha x + \frac{V}{P},$$

also muss die Gleichung

$$0 = -\frac{V\alpha l \cos \alpha l}{P \sin \alpha l} + \frac{V}{P}$$

erfüllt sein. Die Auflösung nach V würde $V = 0$, hiermit aber auch $A = 0$ und schliesslich auch $y = 0$ liefern. Das ist natürlich ein möglicher Gleichgewichtszustand, nämlich jener, bei dem der Stab unter der Belastung geradlinig bleibt. Für diesen interessiren wir uns aber nicht und in der That wird die vorstehende Gleichung bei einem beliebigen Werthe von V auch dann noch erfüllt, wenn

$$\frac{\alpha l \cos \alpha l}{\sin \alpha l} = 1 \quad \text{oder} \quad \alpha l = \operatorname{tg} \alpha l$$

ist. Dies ist eine transcendente Gleichung für αl, die unendlich viele Wurzeln hat; für uns kommt aber nur die kleinste auf $\alpha l = 0$ folgende in Betracht, da es sich nur darum handelt, wie weit wir P wachsen lassen müssen, um eine Ausbiegung, wie sie in Abb. 66 gezeichnet ist, eben noch aufrecht erhalten zu können. Man sieht leicht ein, dass αl jedenfalls grösser als π werden muss, um die Tangente des Winkels gleich dem Bogen zu machen und durch Probiren findet man, dass ungefähr

$$\alpha l = 4{,}49$$

die gesuchte Wurzel der Gleichung ist. Das Quadrat von 4,49 kann gleich 20 gesetzt werden und mit Rücksicht auf die Bedeutung von α erhält man daher

$$P = 20 \frac{E\Theta}{l^2}, \tag{268}$$

also ziemlich genau das Doppelte der Knickkraft für den Stab mit frei drehbaren Enden oder die Hälfte des für den Stab mit beiderseits eingespannten Enden gefundenen Werthes. Anstatt dessen kann man Gl. (268) auch dahin aussprechen, dass der am einen Ende eingespannte und am anderen drehbar gelagerte Stab dieselbe Knickfestigkeit hat, als wenn er beiderseits drehbar gelagert wäre, falls zugleich an Stelle der Länge l die Länge $\frac{l}{\sqrt{2}}$ genommen wird. Von dieser Zurückführung auf eine gleichwerthige Länge des in Spitzen gelagerten Stabes war schon in den Eingangssätzen dieses Paragraphen Gebrauch gemacht und sie ist überhaupt recht bequem. So kann auch Gl. (267) dahin gedeutet werden, dass als gleichwerthige Länge $\frac{l}{2}$ genommen werden muss, um den Fall des Stabes mit beiderseits eingespannten Enden auf den Normalfall der Spitzenlagerung zurückzuführen.