Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

Formeln für den beiderseits eingespannten Stab.

urn:nbn:de:hbz:466:1-84594

In der letzten Gleichung ist sowohl der Faktor B als der Faktor α von Null verschieden, daher muss $\sin \alpha l = 0$ sein. Der Winkel αl ist nicht Null; damit der angenommene Gleichgewichtszustand bestehen kann, muss daher die Last P so weit gesteigert werden, bis $\alpha l = \pi$ oder ein Vielfaches von π geworden ist. Wollte man $\alpha l = \pi$ setzen, so wäre zwar die eine Grenzbedingung erfüllt, aber nicht zugleich die noch ausstehende, dass auch y für $x = l$ verschwinden muss. Diese Lösung würde daher für den von dem vorliegenden verschiedenen Fall passen, dass sich das rechte Ende des Stabes zwar nicht drehen, wohl aber frei in der Richtung der Y-Axe verschieben könnte. Um der letzten Grenzbedingung zu genügen, muss vielmehr auch

$$B \cos \alpha l - \frac{M_0}{P} = 0$$

oder $\cos \alpha l = +1$ sein und nicht gleich -1, wie für $\alpha l = \pi$. Um den zur Untersuchung gestellten Fall zu verwirklichen, müssen wir daher die Last P noch weiter wachsen lassen, bis $\alpha l = 2\pi$ geworden ist. Setzt man in diese Gleichung den Werth von α ein und löst nach P auf, so erhält man

$$P = 4\pi^2 \frac{E\Theta}{l^2}. \tag{267}$$

Der kritische Werth der Belastung ist also bei unwandelbar eingespannten Enden viermal so gross als bei frei drehbaren Enden. Wenn P kleiner ist, kann der angenommene Gleichgewichtszustand nicht bestehen bleiben und der Stab streckt sich, wenn er sich selbst überlassen wird, wieder gerade. Im umgekehrten Falle schreitet dagegen die Biegung immer weiter fort, bis sie zum Zusammenbruche führt.

Natürlich wird durch die anfängliche Excentricität des Kraftangriffs u. s. f. der Bruch noch etwas beschleunigt und die darüber in den früheren Paragraphen durchgeführten Betrachtungen lassen sich fast ohne Aenderung auf den vorliegenden Fall übertragen; hier ist nur deshalb davon abgesehen worden, um die Untersuchung nicht zu weitläufig zu gestalten.

Endlich sei jetzt noch der Fall untersucht, dass der Stab nur am einen Ende als eingespannt, am anderen aber als frei drehbar befestigt angenommen werden kann. Die Untersuchung ist ganz ähnlich der vorigen. Man muss beachten, dass an dem drehbar befestigten Ende auch eine quer zur Stabaxe gerichtete

Abb. 66.

Kraft V übertragen werden muss, um dieses Ende gegen eine Verschiebung im Sinne der y-Axe zu schützen. Für das Biegungsmoment M im Querschnitte x erhält man

$$M = Py - Vx,$$

woraus der Reihe nach folgt

$$E\Theta \frac{d^2y}{dx^2} = -Py + Vx,$$

$$y = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x + \frac{V}{P} x,$$

wenn α die frühere Bedeutung hat. Wegen $y = 0$ für $x = 0$ folgt $B = 0$ und wegen $y = 0$ für $x = l$

$$A = -\frac{Vl}{P \sin \alpha l}.$$

Damit sind die Integrationsconstanten bestimmt. Dagegen ist V noch unbekannt, während zugleich noch die Grenzbedingung $\frac{dy}{dx} = 0$ für $x = l$ zur Verfügung steht. Mit $B = 0$ hat man durch Differentiiren

$$\frac{dy}{dx} = A\alpha \cos \alpha x + \frac{V}{P},$$

also muss die Gleichung

$$0 = -\frac{V\alpha l \cos \alpha l}{P \sin \alpha l} + \frac{V}{P}$$

erfüllt sein. Die Auflösung nach V würde $V = 0$, hiermit aber auch $A = 0$ und schliesslich auch $y = 0$ liefern. Das ist natürlich ein möglicher Gleichgewichtszustand, nämlich jener, bei dem der Stab unter der Belastung geradlinig bleibt. Für diesen interessiren wir uns aber nicht und in der That