



Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

§. 59. Stab mit Einspannung an einem oder an beiden Enden.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-84594](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-84594)

$$P_K = aF - b \frac{lF}{t} \quad (265)$$

gesetzt werden. Die Constanten a und b sind nach den Versuchen ermittelt und zwar für

Schweisseisen	$a = 3030$ atm,	$b = 12,90$ atm.
Weiches Flusseisen	$a = 3100$ „	$b = 11,40$ „
Härteres Flusseisen	$a = 3210$ „	$b = 11,60$ „
Lufttrockenes Nadelholz	$a = 293$ „	$b = 1,94$ „

Für Gusseisen reicht Gl. (265) mit zwei Constanten nicht aus. Für Stäbe mit Längenverhältnissen $\frac{l}{t} = 5$ bis 80 setzt Herr v. Tetmajer nach seinen Versuchen

$$\frac{P_K}{F} = \left(0,53 \left(\frac{l}{t} \right)^2 - 120 \frac{l}{t} + 7760 \right) \text{ atm.} \quad (266)$$

Für schlankere Stäbe wird die Anwendung der Euler'schen Formel empfohlen. Bei allen diesen Formeln wird vorausgesetzt, dass die Enden um Spitzen drehbar gelagert sind.

§ 59. Stab mit Einspannung an einem oder an beiden Enden.

Wenn das eine Ende des Stabs fest eingespannt und das andere ganz frei beweglich ist, verhält sich der Stab genau so wie eine Hälfte des beiderseits auf Spitzen gelagerten Stabs von der doppelten Länge. Es ist daher nicht nöthig, diesen Fall besonders zu untersuchen; man kann vielmehr die früher abgeleiteten Formeln benutzen, wenn man darin nur überall l durch $2l$ ersetzt. Ein etwas allgemeinerer Fall wird unter den Aufgaben behandelt werden.

Anders ist es, wenn der Stab an beiden Enden festgehalten wird und dort als fest eingespannt betrachtet werden kann. Freilich ist es schwer möglich, diese Voraussetzung genau zu verwirklichen, die Anordnung an den Stabenden also so zu treffen, dass in der That jede kleine Drehung der Endtangentialen der elastischen Linie verhindert wird. Es ist aber immerhin nützlich, sich Rechenschaft darüber zu geben, wie gross die Knicklast in diesem Falle würde, wenn man auch bei der

praktischen Anwendung besser thun wird, auf die genaue Erfüllung der genannten Bedingung nicht zu rechnen, die wirkliche Tragfähigkeit des Stabes also entsprechend niedriger einzuschätzen. Diese Einschätzung muss dem Ermessen des Constructeurs im einzelnen Falle überlassen bleiben; sie wird sich in erster Linie nach dem Vertrauen zu richten haben, das man im gegebenen Falle in die Güte der Einspannung setzen kann. Wenn z. B. ein Stab einfach mit stumpfen Enden zwischen die Druckplatten einer Festigkeitsmaschine eingespannt wird, wird man bedenken müssen, dass eine geringe Unebenheit der Endquerschnitte eine Drehung trotzdem ermöglichen kann oder dass sich auch die Druckplatten selbst unter Umständen etwas schief stellen können, wenn sie nicht ganz besonders gut geführt sind. Bei der Ausführung eines Knickversuches dieser Art kann man sich von der Wirksamkeit der Einspannung übrigens leicht dadurch überzeugen, dass man an dem Stabende einen kleinen Spiegel anbringt, auf den man ein Fernrohr richtet, um das Spiegelbild eines festen Maassstabes darin zu beobachten. Bei genauer Einspannung darf sich der Spiegel nicht drehen.*)

Bei der folgenden Rechnung nehme ich indessen an, dass die feste Einspannung genau verwirklicht sei. Die beiden

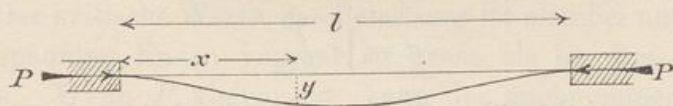


Abb. 65.

Endtangente der elastischen Linie in Abb. 65 fallen dann miteinander und mit der ursprünglichen Lage der Stabaxe

*) Vor Kurzem habe ich einen Belastungsversuch mit einer grossen gusseisernen Säule auf diese Art ausgeführt. Die Belastung wurde auf $\frac{1}{3}$ der zu erwartenden Knicklast gesteigert. Es zeigte sich, dass sich die Stabenden fast um dasselbe Maass drehen, das man bei einer Spitzenlagerung der Enden hätte erwarten können. Dieses Resultat bestätigt von Neuem, wie wenig man sich auf die durch eine stumpfe Auflagerung der Kopf- und der Fussplatte bewirkte Einspannung verlassen kann (Mittheilungen meines Laborat., Heft 27).

oder auch mit der Richtungslinie der Kräfte P zusammen, wenn wir jetzt der Einfachheit wegen von der Berücksichtigung der anfänglichen Excentricität der Kraftangriffslinie ebenso wie von der ursprünglichen Krümmung des Stabes absehen. Wir wollen untersuchen, bei welchem Werthe von P der durch Abb. 65 angegebene Gleichgewichtszustand bestehen kann.

Für den Querschnitt mit der Abscisse x haben wir links vom Schnitte ausser der Kraft P noch ein Kräftepaar, das auf das Stabende übertragen werden muss, um eine Drehung zu verhindern. Das Moment dieses Kräftepaars heisst das Einspannmoment oder auch das Anfangsmoment und soll mit M_0 bezeichnet werden. Das Biegemoment für den Querschnitt x ist dann

$$M = M_0 + Py$$

und die Gleichung der elastischen Linie liefert

$$E\Theta \frac{d^2y}{dx^2} = -(M_0 + Py).$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichung lautet

$$y = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x - \frac{M_0}{P},$$

wenn unter α , wie schon früher, zur Abkürzung der Werth

$$\alpha = \sqrt{\frac{P}{E\Theta}}$$

verstanden wird, während A und B die beiden Integrationsconstanten sind. Für $x = 0$ muss y verschwinden, daher ist

$$B = \frac{M_0}{P}$$

zu setzen. Ferner muss wegen der Einspannung der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ sowohl für $x = 0$ als für $x = l$ verschwinden. Man hat

$$\frac{dy}{dx} = A\alpha \cos \alpha x - B\alpha \sin \alpha x$$

und daher zunächst $A = 0$ und ferner

$$B\alpha \sin \alpha l = 0.$$

In der letzten Gleichung ist sowohl der Faktor B als der Faktor α von Null verschieden, daher muss $\sin \alpha l = 0$ sein. Der Winkel αl ist nicht Null; damit der angenommene Gleichgewichtszustand bestehen kann, muss daher die Last P so weit gesteigert werden, bis $\alpha l = \pi$ oder ein Vielfaches von π geworden ist. Wollte man $\alpha l = \pi$ setzen, so wäre zwar die eine Grenzbedingung erfüllt, aber nicht zugleich die noch ausstehende, dass auch y für $x = l$ verschwinden muss. Diese Lösung würde daher für den von dem vorliegenden verschiedenen Fall passen, dass sich das rechte Ende des Stabes zwar nicht drehen, wohl aber frei in der Richtung der Y -Axe verschieben könnte. Um der letzten Grenzbedingung zu genügen, muss vielmehr auch

$$B \cos \alpha l - \frac{M_0}{P} = 0$$

oder $\cos \alpha l = +1$ sein und nicht gleich -1 , wie für $\alpha l = \pi$. Um den zur Untersuchung gestellten Fall zu verwirklichen, müssen wir daher die Last P noch weiter wachsen lassen, bis $\alpha l = 2\pi$ geworden ist. Setzt man in diese Gleichung den Werth von α ein und löst nach P auf, so erhält man

$$P = 4\pi^2 \frac{E \Theta}{l^2}. \quad (267)$$

Der kritische Werth der Belastung ist also bei unwandelbar eingespannten Enden viermal so gross als bei frei drehbaren Enden. Wenn P kleiner ist, kann der angenommene Gleichgewichtszustand nicht bestehen bleiben und der Stab streckt sich, wenn er sich selbst überlassen wird, wieder gerade. Im umgekehrten Falle schreitet dagegen die Biegung immer weiter fort, bis sie zum Zusammenbruche führt.

Natürlich wird durch die anfängliche Excentricität des Kraftangriffs u. s. f. der Bruch noch etwas beschleunigt und die darüber in den früheren Paragraphen durchgeführten Betrachtungen lassen sich fast ohne Aenderung auf den vorliegenden Fall übertragen; hier ist nur deshalb davon abgesehen worden, um die Untersuchung nicht zu weitläufig zu gestalten.

Endlich sei jetzt noch der Fall untersucht, dass der Stab nur am einen Ende als eingespannt, am anderen aber als frei drehbar befestigt angenommen werden kann. Die Untersuchung ist ganz ähnlich der vorigen. Man muss beachten, dass an dem drehbar befestigten Ende auch eine quer zur Stabaxe gerichtete

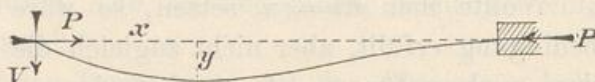


Abb. 66.

Kraft V übertragen werden muss, um dieses Ende gegen eine Verschiebung im Sinne der y -Axe zu schützen. Für das Biegemoment M im Querschnitte x erhält man

$$M = Py - Vx,$$

woraus der Reihe nach folgt

$$E \Theta \frac{d^2 y}{dx^2} = -Py + Vx,$$

$$y = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x + \frac{V}{P} x,$$

wenn α die frühere Bedeutung hat. Wegen $y = 0$ für $x = 0$ folgt $B = 0$ und wegen $y = 0$ für $x = l$

$$A = -\frac{Vl}{P \sin \alpha l}.$$

Damit sind die Integrationskonstanten bestimmt. Dagegen ist V noch unbekannt, während zugleich noch die Grenzbedingung $\frac{dy}{dx} = 0$ für $x = l$ zur Verfügung steht. Mit $B = 0$ hat man durch Differentiieren

$$\frac{dy}{dx} = A \alpha \cos \alpha x + \frac{V}{P},$$

also muss die Gleichung

$$0 = -\frac{V \alpha l \cos \alpha l}{P \sin \alpha l} + \frac{V}{P}$$

erfüllt sein. Die Auflösung nach V würde $V = 0$, hiermit aber auch $A = 0$ und schliesslich auch $y = 0$ liefern. Das ist natürlich ein möglicher Gleichgewichtszustand, nämlich jener, bei dem der Stab unter der Belastung geradlinig bleibt. Für diesen interessieren wir uns aber nicht und in der That

wird die vorstehende Gleichung bei einem beliebigen Werthe von V auch dann noch erfüllt, wenn

$$\frac{\alpha l \cos \alpha l}{\sin \alpha l} = 1 \quad \text{oder} \quad \alpha l = \operatorname{tg} \alpha l$$

ist. Dies ist eine transcendente Gleichung für αl , die unendlich viele Wurzeln hat; für uns kommt aber nur die kleinste auf $\alpha l = 0$ folgende in Betracht, da es sich nur darum handelt, wie weit wir P wachsen lassen müssen, um eine Ausbiegung, wie sie in Abb. 66 gezeichnet ist, eben noch aufrecht erhalten zu können. Man sieht leicht ein, dass αl jedenfalls grösser als π werden muss, um die Tangente des Winkels gleich dem Bogen zu machen und durch Probiren findet man, dass ungefähr

$$\alpha l = 4,49$$

die gesuchte Wurzel der Gleichung ist. Das Quadrat von 4,49 kann gleich 20 gesetzt werden und mit Rücksicht auf die Bedeutung von α erhält man daher

$$P = 20 \frac{E \Theta}{l^2}, \quad (268)$$

also ziemlich genau das Doppelte der Knickkraft für den Stab mit frei drehbaren Enden oder die Hälfte des für den Stab mit beiderseits eingespannten Enden gefundenen Werthes. Anstatt dessen kann man Gl. (268) auch dahin aussprechen, dass der am einen Ende eingespannte und am anderen drehbar gelagerte Stab dieselbe Knickfestigkeit hat, als wenn er beiderseits drehbar gelagert wäre, falls zugleich an Stelle der Länge l die Länge $\frac{l}{\sqrt{2}}$ genommen wird. Von dieser Zurückführung auf eine gleichwerthige Länge des in Spitzen gelagerten Stabes war schon in den Eingangssätzen dieses Paragraphen Gebrauch gemacht und sie ist überhaupt recht bequem. So kann auch Gl. (267) dahin gedeutet werden, dass als gleichwerthige Länge $\frac{l}{2}$ genommen werden muss, um den Fall des Stabes mit beiderseits eingespannten Enden auf den Normalfall der Spitzenlagerung zurückzuführen.