Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

§. 57. Stab mit einer ursprünglichen Krümmung.

urn:nbn:de:hbz:466:1-84594

kann man die erste Annahme entsprechend verbessern und die Construction hiermit noch einmal wiederholen. Auf jeden Fall kommt es nachher auf das Verhältniss der absoluten Grösse der Ordinaten für die gewählte und für die nach dieser Annahme construirte elastische Linie an. Das Verhältniss zwischen beiden liefert die Knicksicherheit, denn man müsste die Last in diesem Verhältnisse vergrössern, um beide zur Deckung zu bringen. Im Uebrigen verweise ich auf die angegebene Quelle.

§ 57. **Stab mit einer ursprünglichen Krümmung.**

Ich werde jetzt noch zeigen, dass auch eine anfängliche Krümmung des Stabs, wenn der zugehörige Pfeil nur überhaupt klein gegen die Querschnittsabmessungen ist, keinen merklichen Unterschied herbeiführt. Dazu soll jetzt von der Excentricität der Kraftangriffslinie abgesehen und vorausgesetzt werden, dass die Stabmittellinie anfänglich eine sehr flache Curve von dem Pfeile f_0 bildete. Diesen flachen Bogen kann man genau genug als Bogen einer Sinuslinie ansehen, also

$$u = f_0 \sin \pi \frac{x}{l} \tag{257}$$

setzen. Die Differentialgleichung der elastischen Linie lautet wie vorher

$$E\Theta \frac{d^2 y}{dx^2} = -P(u + y)$$

oder nach Einsetzen von u

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{P}{E\Theta}\left(y + f_0 \sin \pi \frac{x}{l}\right). \tag{258}$$

Die schon den Grenzbedingungen ($y = 0$ für $x = 0$ und für $x = l$) angepasste Lösung dieser Differentialgleichung lautet

$$y = f \sin \pi \frac{x}{l}, \tag{259}$$

wenn mit f zur Abkürzung der Werth

$$f = \frac{f_0}{\pi^2 \frac{E\Theta}{Pl^2} - 1} \tag{260}$$

bezeichnet wird. Die geometrische Bedeutung von f geht aus Gl. (259) ohne Weiteres hervor; es ist der grösste Werth, den y annehmen kann und dieser tritt ein, wenn $\frac{\pi x}{l}$ einen rechten Winkel angibt, also für $x = \frac{l}{2}$, d. h. f ist die elastische Ausbiegung nach der Seite hin, die die Mitte des Stabs unter der Belastung P erfährt. Mit Rücksicht auf Gl. (255) kann man f auch in der Form

$$f = \frac{f_0}{\frac{P_E}{P} - 1} \tag{261}$$

schreiben und man erkennt, dass auch in diesem Falle, wenn der ursprüngliche Krümmungspfeil f_0 klein war, eine grössere Ausbiegung f, also eine Bruchgefahr durch Ausknicken erst dann eintritt, wenn sich P dem Euler'schen Werthe P_E nähert.

Der Winkel, um den sich die Endtangente der elastischen Linie bei der Formänderung dreht, sei mit φ bezeichnet. So lange φ klein ist, kann der Bogen gleich der trigonometrischen Tangente gesetzt werden und man hat daher

$$\varphi = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=0}$$

oder mit Rücksicht auf Gl. (259)

$$\varphi = \pi \frac{f}{l}. \tag{262}$$

Denkt man sich bei einem Knickversuche mit einem Stabe, dessen anfänglicher Krümmungspfeil f_0 einige mm, also merklich mehr beträgt, als die unvermeidliche Excentricität der Kraftangriffslinie, die Lasten P als Abscissen und die zugehörigen Biegungspfeile f, die man mit einer geeigneten Vorrichtung gemessen hat, als Ordinaten aufgetragen, so muss man nach Gl. (261) — abgesehen natürlich von unvermeidlichen Versuchsfehlern — eine Hyperbel erhalten. Der Winkel, um den sich die Stabenden drehen, wächst nach Gl. (262) proportional mit f. Wenn man also auch φ misst, was mit einer Spiegelablesung leicht möglich ist und es in derselben Weise aufträgt, so muss gleichfalls eine Hyperbel entstehen. Die senkrechten Asymptoten beider Hyperbeln entsprechen dem Euler'schen Werthe $P = P_E$.

Diese Folgerungen der Theorie habe ich vor einigen Jahren durch den Versuch geprüft und sie gut bestätigt gefunden.

§ 58. Die wirkliche Knickbelastung P_K.

Schon in § 56 ist darauf hingewiesen worden, dass der Stab schon etwas früher, als der Euler'sche Werth P_E erreicht ist, zum Bruche oder zu bleibenden Formänderungen gelangt. Wie viel eher dies geschieht, hängt von dem anfänglichen Krümmungspfeile f_0 in Verbindung mit der anfänglichen Excentricität der Kraftangriffslinie ab. Um eine ungefähre Vorstellung davon zu geben, wie gross die aus diesem Grunde zu erwartenden Abweichungen sind, führe ich die Rechnung für den Fall durch, dass der Stab anfänglich etwas gekrümmt war, während von einer Berücksichtigung der anfänglichen Excentricität abgesehen werden soll, um die Rechnung nicht zu weitläufig zu machen.

Die grösste Anstrengung des Materials tritt im Mittelquerschnitte auf. Man hat dort für irgend eine Belastung P

$$\sigma = \frac{P}{F} \pm \frac{P(f + f_0)}{\Theta} \cdot a,$$

wenn a den Abstand der betreffenden Faser von der zur Nulllinie parallelen Schwerlinie angibt. Für f kann man den Werth aus Gl. (261) einsetzen. Die wirkliche Knickbelastung P_K wird schon dann nahezu erreicht, wenn die grösste im Querschnitte vorkommende Spannung σ die Proportionalitätsgrenze überschreitet, denn sobald dies geschehen ist, wachsen die Ausbiegungen schneller als nach den vorausgehenden Formeln und der Bruch wird dadurch alsbald herbeigeführt. Wir erhalten daher P_K durch Auflösung der Gleichung

$$F\sigma' = P + \frac{PaF}{\Theta}\left(f_0 + f_0 \frac{P}{P_E - P}\right)$$

nach P, wenn wir darin unter σ' die Proportionalitätsgrenze des Materials gegen Druck und unter a den Abstand der äussersten Kante von der Schwerlinie verstehen. Für $F\sigma'$ sei zur Abkürzung wieder P_D geschrieben, also jene Belastung