Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

Formel für die Ausbiegung.

$$M = P(u + y).$$

Die Gleichung der geraden Linie AA lautet

$$u = u_0 \cdot \frac{l - x}{l} + u_l \cdot \frac{x}{l}$$

und für die krumme Linie AA gilt die Differentialgleichung der elastischen Linie

$$E\Theta \frac{d^2 y}{dx^2} = - P(u + y).$$

Setzt man noch

$$v = u + y,$$

so kann diese auch geschrieben werden

$$E\Theta \frac{d^2 v}{dx^2} = - Pv. \tag{250}$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung zweiter Ordnung ist von der Form

$$v = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x, \tag{251}$$

in der A und B die beiden Integrationsconstanten sind, während α, wie man sich durch Einsetzen des angegebenen Ausdrucks in die Differentialgleichung überzeugt,

$$\alpha = \sqrt{\frac{P}{E\Theta}} \tag{252}$$

gewählt werden muss, damit die Differentialgleichung identisch erfüllt wird. Die Integrationsconstanten sind mit Hülfe der Grenzbedingungen zu bestimmen. Für $x = 0$ muss $v = u_0$ und für $x = l$ muss $v = u_l$ werden. Daraus folgt

$$B = u_0 \quad \text{und} \quad A \sin \alpha l + u_0 \cos \alpha l = u_l.$$

Löst man die letzte Gleichung nach A auf und setzt die Werthe beider Constanten in Gl. (251) ein, so geht sie über in

$$v = \frac{\sin \alpha x}{\sin \alpha l}(u_l - u_0 \cos \alpha l) + u_0 \cos \alpha x. \tag{253}$$

Damit ist die Gestalt der elastischen Linie vollständig bekannt. Wir wollen jetzt zusehen, unter welchen Umständen es vorkommen kann, dass v erheblich grösser wird, als die ursprüngliche Excentricität u. Der in der Gleichung für v vorkommende Klammerwerth und das letzte Glied $u_0 \cos \alpha x$ sind immer von derselben Grössenordnung wie die u selbst, da ein Cosinus immer ein echter Bruch ist. Wenn also v viel grösser als die u werden soll, kann dies nur dadurch geschehen, dass der Faktor $\frac{\sin \alpha x}{\sin \alpha l}$ vor der Klammer sehr gross wird. Denkt man sich zunächst die Belastung P sehr klein, so dass auch α nach Gl. (252) sehr klein ist, so kann $\sin \alpha x = \alpha x$ und $\sin \alpha l = \alpha l$ gesetzt werden und der Faktor vor der Klammer ist gleich $\frac{x}{l}$, also überall ein echter Bruch. Dies trifft auch so lange jedenfalls noch zu, als der Winkel αl kleiner als ein Rechter, d. h. αl kleiner als $\frac{\pi}{2}$ ist. Sobald aber P und damit α noch weiter wächst, nimmt nun $\sin \alpha l$ wieder ab, während $\sin \alpha x$ z. B. in der Mitte vorläufig noch weiter zunimmt. Zu sehr grossen Werthen wird der Faktor aber erst dann gelangen können, wenn sich beim weiteren Anwachsen von P der Winkel αl einem Gestreckten, sein Sinus also sich der Null nähert, während $\sin \alpha x$ dann immer noch grössere Werthe hat und sich für $x = \frac{l}{2}$ sogar dem grössten Werthe nähert, den ein Sinus annehmen kann. Zuletzt, wenn

$$\alpha l = \pi \tag{254}$$

geworden ist, liefert Gl. (253) sogar einen unendlich grossen Werth für v. Natürlich ist dies nur so zu verstehen, dass kurz vorher schon v so gross wird, dass sich der Stab dauernd verbiegt, womit die Gültigkeitsgrenze unserer Betrachtungen überschritten ist. Setzt man α aus Gl. (252) in Gl. (254) ein und löst nach P auf, so erhält man

$$P_E = \pi^2 \frac{E\Theta}{l^2}. \tag{255}$$

Diese Formel wurde zuerst von Euler abgeleitet. Der Werth P_E gibt die kritische Belastung an, die nicht ganz erreicht werden darf, ohne den Stab zum Bruche oder zu einer bleibenden seitlichen Ausbiegung zu bringen.

Von Wichtigkeit ist die Bemerkung, dass die ursprünglichen Excentricitäten u in Gl. (255) gar nicht mehr vor-