



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

Zehnter Abschnitt Die Knickfestigkeit.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-84594](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-84594)

Zehnter Abschnitt.

Die Knickfestigkeit.

§ 56. Ableitung der Euler'schen Formel für Stäbe mit Spitzenlagerung.

Zunächst nehme ich an, der Stab, der einer Druckbelastung ausgesetzt werden soll, sei vorher genau gerade gewesen. Es ist freilich nicht möglich, einen Stab vollkommen gerade zu richten und von den kleinen unvermeidlichen Abweichungen von der Geraden hängt das Verhalten des Stabes bei der Beanspruchung auf Zerknicken im Gegensatze zu den anderen Belastungsarten wesentlich ab. Ich werde indessen nachher auf diesen Umstand besonders eingehen und will einstweilen davon absehen. Dagegen soll von vornherein darauf Rücksicht genommen werden, dass es auch nicht möglich ist, die Belastung absolut genau centrisch aufzubringen, also so, dass die Richtungslinie der beiden Druckkräfte, die an den Enden des Stabes angreifen, genau mit der durch die Querschnittsschwerpunkte gelegten Stabaxe zusammenfielen. Immerhin sollen aber die Abweichungen beider Linien von einander als klein gegenüber den Querschnittsabmessungen angesehen werden; ich setze also mit andern Worten voraus, dass man sich bemüht hatte, die Belastung möglichst genau centrisch aufzubringen, dass dies aber nicht völlig gelungen ist und dass man daher auch nicht wissen kann, nach welcher Richtung und in welcher Grösse Abweichungen vorgekommen sind. Darin unterscheidet sich der Fall der Knickfestigkeit

von dem früher behandelten Falle der gewöhnlichen excentrischen Druckbelastung.

Für jeden Querschnitt des Stabes kann man sich die Kraft P nach dem Schwerpunkte verlegt denken. Bei dieser Parallelverlegung tritt aber noch ein kleines Kräftepaar auf, das neben der gleichförmig vertheilten Druckbelastung noch eine Vertheilung von Biegungsspannungen zur Folge hat. Hierdurch wird die vorher gerade Stabaxe etwas gekrümmt und die Entfernung zwischen dem Querschnittsschwerpunkte und der Richtungslinie von P vergrössert sich dadurch ein wenig. Bei der gewöhnlichen excentrischen Druckbelastung braucht man darauf keine Rücksicht zu nehmen, weil dort angenommen wird, dass die Excentricität von vornherein verhältnissmässig gross war, so dass die geringe Vergrösserung durch die kleine Ausbiegung des Stabes dagegen nicht in Betracht kommt. Hier aber, wo die ursprüngliche Excentricität schon sehr gering war, kann es leicht vorkommen, dass die Aenderung, die sie durch die Ausbiegung erfährt, von gleicher Grössenordnung mit ihr ist oder sie selbst noch überwiegt.

Der Einfachheit wegen will ich annehmen, dass man durch die Kraftangriffslinie der P und durch die vorher gerade

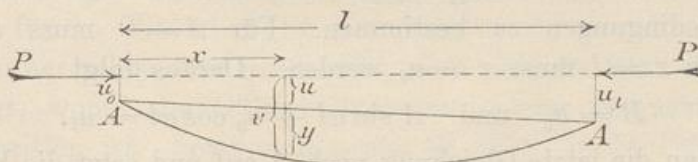


Abb. 64.

Stabaxe AA eine Ebene legen kann. Abb. 64 möge dann, freilich in sehr starker Verzerrung, die Lage beider Linien gegen einander angeben. Die zwischen A und A gezogene krumme Linie gebe die Gestalt an, in die die vorher gerade Stabaxe durch die Biegung übergeht. Die ursprüngliche Excentricität u des Kraftangriffs im Querschnitte x geht in $u + y$ über und nachdem das Gleichgewicht eingetreten ist, haben wir für das Biegemoment M im Querschnitte x

$$M = P(u + y).$$

Die Gleichung der geraden Linie AA lautet

$$u = u_0 \cdot \frac{l-x}{l} + u_1 \cdot \frac{x}{l}$$

und für die krumme Linie AA gilt die Differentialgleichung der elastischen Linie

$$E\Theta \frac{d^2 y}{dx^2} = -P(u + y).$$

Setzt man noch

$$v = u + y,$$

so kann diese auch geschrieben werden

$$E\Theta \frac{d^2 v}{dx^2} = -Pv. \quad (250)$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung zweiter Ordnung ist von der Form

$$v = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x, \quad (251)$$

in der A und B die beiden Integrationsconstanten sind, während α , wie man sich durch Einsetzen des angegebenen Ausdrucks in die Differentialgleichung überzeugt,

$$\alpha = \sqrt{\frac{P}{E\Theta}} \quad (252)$$

gewählt werden muss, damit die Differentialgleichung identisch erfüllt wird. Die Integrationsconstanten sind mit Hilfe der Grenzbedingungen zu bestimmen. Für $x = 0$ muss $v = u_0$ und für $x = l$ muss $v = u_1$ werden. Daraus folgt

$$B = u_0 \quad \text{und} \quad A \sin \alpha l + u_0 \cos \alpha l = u_1.$$

Löst man die letzte Gleichung nach A auf und setzt die Werthe beider Constanten in Gl. (251) ein, so geht sie über in

$$v = \frac{\sin \alpha x}{\sin \alpha l} (u_1 - u_0 \cos \alpha l) + u_0 \cos \alpha x. \quad (253)$$

Damit ist die Gestalt der elastischen Linie vollständig bekannt. Wir wollen jetzt zusehen, unter welchen Umständen es vorkommen kann, dass v erheblich grösser wird, als die ursprüngliche Excentricität u . Der in der Gleichung für v vorkommende Klammerwerth und das letzte Glied $u_0 \cos \alpha x$ sind immer von derselben Grössenordnung wie die u selbst,

da ein Cosinus immer ein echter Bruch ist. Wenn also v viel grösser als die u werden soll, kann dies nur dadurch geschehen, dass der Faktor $\frac{\sin \alpha x}{\sin \alpha l}$ vor der Klammer sehr gross wird. Denkt man sich zunächst die Belastung P sehr klein, so dass auch α nach Gl. (252) sehr klein ist, so kann $\sin \alpha x = \alpha x$ und $\sin \alpha l = \alpha l$ gesetzt werden und der Faktor vor der Klammer ist gleich $\frac{x}{l}$, also überall ein echter Bruch. Dies trifft auch so lange jedenfalls noch zu, als der Winkel αl kleiner als ein Rechter, d. h. αl kleiner als $\frac{\pi}{2}$ ist. Sobald aber P und damit α noch weiter wächst, nimmt nun $\sin \alpha l$ wieder ab, während $\sin \alpha x$ z. B. in der Mitte vorläufig noch weiter zunimmt. Zu sehr grossen Werthen wird der Faktor aber erst dann gelangen können, wenn sich beim weiteren Anwachsen von P der Winkel αl einem Gestreckten, sein Sinus also sich der Null nähert, während $\sin \alpha x$ dann immer noch grössere Werthe hat und sich für $x = \frac{l}{2}$ sogar dem grössten Werthe nähert, den ein Sinus annehmen kann. Zuletzt, wenn

$$\alpha l = \pi \quad (254)$$

geworden ist, liefert Gl. (253) sogar einen unendlich grossen Werth für v . Natürlich ist dies nur so zu verstehen, dass kurz vorher schon v so gross wird, dass sich der Stab dauernd verbiegt, womit die Gültigkeitsgrenze unserer Betrachtungen überschritten ist. Setzt man α aus Gl. (252) in Gl. (254) ein und löst nach P auf, so erhält man

$$P_E = \pi^2 \frac{E \Theta}{l^2}. \quad (255)$$

Diese Formel wurde zuerst von Euler abgeleitet. Der Werth P_E gibt die kritische Belastung an, die nicht ganz erreicht werden darf, ohne den Stab zum Bruche oder zu einer bleibenden seitlichen Ausbiegung zu bringen.

Von Wichtigkeit ist die Bemerkung, dass die ursprünglichen Excentricitäten u in Gl. (255) gar nicht mehr vor-

kommen. So lange die u überhaupt nur klein sind, ist es ganz gleichgültig, wie gross sie nun im einzelnen Falle sind; die kritische Belastung P_E wird davon nicht berührt. Freilich sieht man nach Gl. (253) auch ein, dass je grösser die u ursprünglich waren, um so eher jene Ausbiegungen v erreicht werden, die schon vor dem vollständigen Ausknicken zu einer Ueberanstrengung des Materials führen. Wenn die u klein waren, wird dies aber immer erst kurz vor der Erreichung des kritischen Werthes P_E eintreffen. Vorausgesetzt wird dabei, dass die blossе Druckbelastung an sich (also wenn sich der Stab nicht ausbiegen würde) erheblich unter der Proportionalitätsgrenze liegt, dass also selbst P_E noch kleiner als

$$P_D = F \cdot \sigma_{zul} \quad (256)$$

ist. Es hängt von der Länge l ab, ob dies zutrifft und bei gegebenem Querschnitte wird das Ausknicken um so eher eintreten, je länger der Stab ist. Kurze Stäbe sind daher nur auf einfache Druckbelastung, längere auf Ausknicken zu berechnen. Von welcher Grenze ab die Knickgefahr in Frage kommt, ist durch einen Vergleich der Formeln (255) und (256) leicht zu entscheiden; unter den Aufgaben wird ein solcher Fall erörtert werden.

Anmerkung. Man kann die Knickfestigkeit, sowohl in dem vorausgehenden einfachsten Falle, als in den weiterhin zu behandelnden (oder auch noch verwickelteren) Fällen auch auf graphischem Wege untersuchen, wie Herr Luigi Vianello (Zeitschr. d. V. D. Ing. 1898, S. 1436) gezeigt hat. Das Verfahren schliesst sich eng an das in § 40 auseinandergesetzte an. Man nimmt zunächst nach Gutdünken irgend eine Form der elastischen Linie an, von der man erwarten kann, dass sie sich von der thatsächlich zu Stande kommenden nicht allzusehr unterscheidet. Damit werden die Hebelarme der Knicklast und hiermit die Biegemomente für diese Form der Ausbiegung bekannt. Man kann dann die zu diesen Biegemomenten gehörige elastische Linie nach dem aus der graphischen Statik bekannten Verfahren konstruiren. Der Vergleich mit der zuerst willkürlich angenommenen Form dieser Linie führt zur Lösung der Aufgabe. Sind beide ihrem allgemeinen Verlaufe nach (abgesehen also von dem absoluten Werthe der Ausbiegungen) zu weit von einander verschieden, so

kann man die erste Annahme entsprechend verbessern und die Construction hiermit noch einmal wiederholen. Auf jeden Fall kommt es nachher auf das Verhältniss der absoluten Grösse der Ordinaten für die gewählte und für die nach dieser Annahme construirte elastische Linie an. Das Verhältniss zwischen beiden liefert die Knicksicherheit, denn man müsste die Last in diesem Verhältnisse vergrössern, um beide zur Deckung zu bringen. Im Uebrigen verweise ich auf die angegebene Quelle.

§ 57. Stab mit einer ursprünglichen Krümmung.

Ich werde jetzt noch zeigen, dass auch eine anfängliche Krümmung des Stabs, wenn der zugehörige Pfeil nur überhaupt klein gegen die Querschnittsabmessungen ist, keinen merklichen Unterschied herbeiführt. Dazu soll jetzt von der Excentricität der Kraftangriffslinie abgesehen und vorausgesetzt werden, dass die Stabmittellinie anfänglich eine sehr flache Curve von dem Pfeile f_0 bildete. Diesen flachen Bogen kann man genau genug als Bogen einer Sinuslinie ansehen, also

$$u = f_0 \sin \pi \frac{x}{l} \quad (257)$$

setzen. Die Differentialgleichung der elastischen Linie lautet wie vorher

$$E\Theta \frac{d^2y}{dx^2} = -P(u + y)$$

oder nach Einsetzen von u

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{P}{E\Theta} \left(y + f_0 \sin \pi \frac{x}{l} \right). \quad (258)$$

Die schon den Grenzbedingungen ($y = 0$ für $x = 0$ und für $x = l$) angepasste Lösung dieser Differentialgleichung lautet

$$y = f \sin \pi \frac{x}{l}, \quad (259)$$

wenn mit f zur Abkürzung der Werth

$$f = \frac{f_0}{\pi^2 \frac{E\Theta}{Pl^2} - 1} \quad (260)$$

bezeichnet wird. Die geometrische Bedeutung von f geht aus Gl. (259) ohne Weiteres hervor; es ist der grösste Werth,

den y annehmen kann und dieser tritt ein, wenn $\frac{\pi x}{l}$ einen rechten Winkel angibt, also für $x = \frac{l}{2}$, d. h. f ist die elastische Ausbiegung nach der Seite hin, die die Mitte des Stabs unter der Belastung P erfährt. Mit Rücksicht auf Gl. (255) kann man f auch in der Form

$$f = \frac{f_0}{\frac{P_E}{P} - 1} \quad (261)$$

schreiben und man erkennt, dass auch in diesem Falle, wenn der ursprüngliche Krümmungspfeil f_0 klein war, eine grössere Ausbiegung f , also eine Bruchgefahr durch Ausknicken erst dann eintritt, wenn sich P dem Euler'schen Werthe P_E nähert.

Der Winkel, um den sich die Endtangente der elastischen Linie bei der Formänderung dreht, sei mit φ bezeichnet. So lange φ klein ist, kann der Bogen gleich der trigonometrischen Tangente gesetzt werden und man hat daher

$$\varphi = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=0}$$

oder mit Rücksicht auf Gl. (259)

$$\varphi = \pi \frac{f}{l}. \quad (262)$$

Denkt man sich bei einem Knickversuche mit einem Stabe, dessen anfänglicher Krümmungspfeil f_0 einige mm, also merklich mehr beträgt, als die unvermeidliche Excentricität der Kraftangriffslinie, die Lasten P als Abscissen und die zugehörigen Biegungspfeile f , die man mit einer geeigneten Vorrichtung gemessen hat, als Ordinaten aufgetragen, so muss man nach Gl. (261) — abgesehen natürlich von unvermeidlichen Versuchsfehlern — eine Hyperbel erhalten. Der Winkel, um den sich die Stabenden drehen, wächst nach Gl. (262) proportional mit f . Wenn man also auch φ misst, was mit einer Spiegelablesung leicht möglich ist und es in derselben Weise aufträgt, so muss gleichfalls eine Hyperbel entstehen. Die senkrechten Asymptoten beider Hyperbeln entsprechen dem Euler'schen Werthe $P = P_E$.

Diese Folgerungen der Theorie habe ich vor einigen Jahren durch den Versuch geprüft und sie gut bestätigt gefunden.

§ 58. Die wirkliche Knickbelastung P_K .

Schon in § 56 ist darauf hingewiesen worden, dass der Stab schon etwas früher, als der Euler'sche Werth P_E erreicht ist, zum Bruche oder zu bleibenden Formänderungen gelangt. Wie viel eher dies geschieht, hängt von dem anfänglichen Krümmungspfeile f_0 in Verbindung mit der anfänglichen Excentricität der Kraftangriffslinie ab. Um eine ungefähre Vorstellung davon zu geben, wie gross die aus diesem Grunde zu erwartenden Abweichungen sind, führe ich die Rechnung für den Fall durch, dass der Stab anfänglich etwas gekrümmt war, während von einer Berücksichtigung der anfänglichen Excentricität abgesehen werden soll, um die Rechnung nicht zu weitläufig zu machen.

Die grösste Anstrengung des Materials tritt im Mittelquerschnitte auf. Man hat dort für irgend eine Belastung P

$$\sigma = \frac{P}{F} \pm \frac{P(f + f_0)}{\Theta} \cdot a,$$

wenn a den Abstand der betreffenden Faser von der zur Nulllinie parallelen Schwerlinie angibt. Für f kann man den Werth aus Gl. (261) einsetzen. Die wirkliche Knickbelastung P_K wird schon dann nahezu erreicht, wenn die grösste im Querschnitte vorkommende Spannung σ die Proportionalitätsgrenze überschreitet, denn sobald dies geschehen ist, wachsen die Ausbiegungen schneller als nach den vorausgehenden Formeln und der Bruch wird dadurch alsbald herbeigeführt. Wir erhalten daher P_K durch Auflösung der Gleichung

$$F\sigma' = P + \frac{PaF}{\Theta} \left(f_0 + f_0 \frac{P}{P_E - P} \right)$$

nach P , wenn wir darin unter σ' die Proportionalitätsgrenze des Materials gegen Druck und unter a den Abstand der äussersten Kante von der Schwerlinie verstehen. Für $F\sigma'$ sei zur Abkürzung wieder P_D geschrieben, also jene Belastung

unter diesem Zeichen verstanden, die bei einfacher Druckbelastung eines kurzen Abschnitts des Stabes zur Ueberschreitung der Proportionalitätsgrenze führt. Die Gleichung ist vom zweiten Grade für P und ihre Auflösung liefert, wenn wir zur Abkürzung die absolute Zahl

$$\frac{\alpha F f_0}{\Theta} = \eta$$

setzen, für P_K

$$P_K = \frac{P_D + (\eta + 1)P_E}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{P_D + (\eta + 1)P_E}{2}\right)^2 - P_D P_E}. \quad (263)$$

Von den beiden Werthen ist immer der kleinere zu nehmen, das Wurzelvorzeichen also stets so zu wählen, dass das Wurzelglied negativ wird. Mit $f_0 = 0$, also bei einem ursprünglich geraden Stabe, wird $\eta = 0$ und $P_K = P_E$, vorausgesetzt, dass $P_D > P_E$ ist. Sollte dagegen $P_D < P_E$ sein, also bei einem kurzen Stabe, so erhält man nach der Bemerkung über das Wurzelvorzeichen $P_K = P_D$. Auf diese Weise unterscheidet die Formel auch zwischen dem Falle der Knickfestigkeit und der blossen Druckbelastung. Um eine Vorstellung davon zu geben, wie gross der Unterschied zwischen P_K und P_E werden kann, führe ich folgende Zahlen an.

Der Stab sei ein gleichschenkliges Winkeleisen von 70 mm Schenkellänge und 9 mm Schenkelstärke, der Elasticitätsmodul sei gleich 2110000 atm und die Proportionalitätsgrenze gleich 2000 atm. Der anfängliche Krümmungspfeil f_0 sei zu 1 mm angenommen. Dann erhält man für die Länge von 2 m:

$$P_D = 23,6 t, \quad P_E = 11,8 t, \quad P_K = 10,4 t,$$

für die Länge von 3 m:

$$P_D = 23,6 t, \quad P_E = 5,2 t, \quad P_K = 5,0 t,$$

im ersten Falle also schon ziemlich erheblich verschiedene Werthe von P_E und P_K . Der Unterschied zwischen beiden wächst schnell, wenn man f_0 vergrössert. Bei dem längeren Stabe ist bei dem gewählten f_0 der Unterschied geringer; man muss aber beachten, dass es um so schwieriger ist, einen Stab hinreichend genau gerade zu richten, je länger er ist.

Unter der Voraussetzung, dass η ein kleiner Bruch ist (dass also f_0 klein ist gegenüber dem Trägheitshalbmesser des Querschnitts), kann man den unter dem Wurzelzeichen in Gl. (263) stehenden Ausdruck mit Vernachlässigung des mit η^2 behafteten Gliedes näherungsweise ersetzen durch

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} (P_D^2 + 2(\eta + 1)P_D P_E + (2\eta + 1)P_E^2 - 4P_D P_E) \\ = \frac{1}{4} ((P_D - P_E)^2 + 2\eta P_E(P_D + P_E)). \end{aligned}$$

Wenn ferner P_D erheblich grösser als P_E ist, also bei einem recht schlanken Stabe, kann man genau genug

$$\sqrt{(P_D - P_E)^2 + 2\eta P_E(P_D + P_E)} = P_D - P_E + \eta \frac{P_E(P_D + P_E)}{P_D - P_E}$$

setzen und Gl. (263) geht damit näherungsweise über in

$$P_K = P_E - \eta \frac{P_E^2}{P_D - P_E}. \quad (264)$$

Diese Gleichung gestattet einen bequemen Ueberschlag über die ungefähr zu erwartende Abweichung der wirklichen Knickbelastung P_K von dem Euler'schen Werthe P_E . Wenn P_D nicht erheblich grösser als P_E ist, muss man aber natürlich auf die ursprüngliche Gleichung (263) zurückgehen.

Wie ich schon erwähnte, kann Gl. (263) auch dann angewendet werden, wenn ein eigentliches Ausknicken gar nicht zu erwarten, wenn also P_D kleiner ist als P_E . Der unmittelbaren Anwendung steht aber die Schwierigkeit im Wege, dass man in der Regel im Ungewissen darüber ist, welchen Werth von f_0 oder von η man im gegebenen Falle als den wahrscheinlichsten anzusehen hat. Ausserdem ist bei der Ableitung von Gl. (263) auch noch nicht auf die unvermeidliche Excentricität des Kraftangriffes Rücksicht genommen. Die Anwendung einer empirischen Formel, die Herr v. Tetmajer aus zahlreichen Versuchen mit Stäben aus verschiedenen Stoffen abgeleitet hat, ist daher in solchen Fällen mehr zu empfehlen. Bezeichnet man den kleinsten Trägheitshalbmesser des Querschnitts mit t , so kann nach v. Tetmajer für $P_D > P_E$

$$P_K = aF - b \frac{lF}{t} \quad (265)$$

gesetzt werden. Die Constanten a und b sind nach den Versuchen ermittelt und zwar für

| | | |
|-------------------------------|-----------------|------------------|
| Schweisseisen | $a = 3030$ atm, | $b = 12,90$ atm. |
| Weiches Flusseisen | $a = 3100$ „ | $b = 11,40$ „ |
| Härteres Flusseisen | $a = 3210$ „ | $b = 11,60$ „ |
| Lufttrockenes Nadelholz | $a = 293$ „ | $b = 1,94$ „ |

Für Gusseisen reicht Gl. (265) mit zwei Constanten nicht aus. Für Stäbe mit Längenverhältnissen $\frac{l}{t} = 5$ bis 80 setzt Herr v. Tetmajer nach seinen Versuchen

$$\frac{P_K}{F} = \left(0,53 \left(\frac{l}{t} \right)^2 - 120 \frac{l}{t} + 7760 \right) \text{ atm.} \quad (266)$$

Für schlankere Stäbe wird die Anwendung der Euler'schen Formel empfohlen. Bei allen diesen Formeln wird vorausgesetzt, dass die Enden um Spitzen drehbar gelagert sind.

§ 59. Stab mit Einspannung an einem oder an beiden Enden.

Wenn das eine Ende des Stabs fest eingespannt und das andere ganz frei beweglich ist, verhält sich der Stab genau so wie eine Hälfte des beiderseits auf Spitzen gelagerten Stabs von der doppelten Länge. Es ist daher nicht nöthig, diesen Fall besonders zu untersuchen; man kann vielmehr die früher abgeleiteten Formeln benutzen, wenn man darin nur überall l durch $2l$ ersetzt. Ein etwas allgemeinerer Fall wird unter den Aufgaben behandelt werden.

Anders ist es, wenn der Stab an beiden Enden festgehalten wird und dort als fest eingespannt betrachtet werden kann. Freilich ist es schwer möglich, diese Voraussetzung genau zu verwirklichen, die Anordnung an den Stabenden also so zu treffen, dass in der That jede kleine Drehung der Endtangente der elastischen Linie verhindert wird. Es ist aber immerhin nützlich, sich Rechenschaft darüber zu geben, wie gross die Knicklast in diesem Falle würde, wenn man auch bei der

praktischen Anwendung besser thun wird, auf die genaue Erfüllung der genannten Bedingung nicht zu rechnen, die wirkliche Tragfähigkeit des Stabes also entsprechend niedriger einzuschätzen. Diese Einschätzung muss dem Ermessen des Constructeurs im einzelnen Falle überlassen bleiben; sie wird sich in erster Linie nach dem Vertrauen zu richten haben, das man im gegebenen Falle in die Güte der Einspannung setzen kann. Wenn z. B. ein Stab einfach mit stumpfen Enden zwischen die Druckplatten einer Festigkeitsmaschine eingespannt wird, wird man bedenken müssen, dass eine geringe Unebenheit der Endquerschnitte eine Drehung trotzdem ermöglichen kann oder dass sich auch die Druckplatten selbst unter Umständen etwas schief stellen können, wenn sie nicht ganz besonders gut geführt sind. Bei der Ausführung eines Knickversuches dieser Art kann man sich von der Wirksamkeit der Einspannung übrigens leicht dadurch überzeugen, dass man an dem Stabende einen kleinen Spiegel anbringt, auf den man ein Fernrohr richtet, um das Spiegelbild eines festen Maassstabes darin zu beobachten. Bei genauer Einspannung darf sich der Spiegel nicht drehen.*)

Bei der folgenden Rechnung nehme ich indessen an, dass die feste Einspannung genau verwirklicht sei. Die beiden

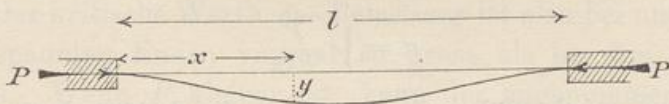


Abb. 65.

Endtangente der elastischen Linie in Abb. 65 fallen dann miteinander und mit der ursprünglichen Lage der Stabaxe

*) Vor Kurzem habe ich einen Belastungsversuch mit einer grossen gusseisernen Säule auf diese Art ausgeführt. Die Belastung wurde auf $\frac{1}{3}$ der zu erwartenden Knicklast gesteigert. Es zeigte sich, dass sich die Stabenden fast um dasselbe Maass drehten, das man bei einer Spitzenlagerung der Enden hätte erwarten können. Dieses Resultat bestätigt von Neuem, wie wenig man sich auf die durch eine stumpfe Auflagerung der Kopf- und der Fussplatte bewirkte Einspannung verlassen kann (Mittheilungen meines Laborat., Heft 27).

oder auch mit der Richtungslinie der Kräfte P zusammen, wenn wir jetzt der Einfachheit wegen von der Berücksichtigung der anfänglichen Excentricität der Kraftangriffslinie ebenso wie von der ursprünglichen Krümmung des Stabes absehen. Wir wollen untersuchen, bei welchem Werthe von P der durch Abb. 65 angegebene Gleichgewichtszustand bestehen kann.

Für den Querschnitt mit der Abscisse x haben wir links vom Schnitte ausser der Kraft P noch ein Kräftepaar, das auf das Stabende übertragen werden muss, um eine Drehung zu verhindern. Das Moment dieses Kräftepaars heisst das Einspannmoment oder auch das Anfangsmoment und soll mit M_0 bezeichnet werden. Das Biegemoment für den Querschnitt x ist dann

$$M = M_0 + Py$$

und die Gleichung der elastischen Linie liefert

$$E\Theta \frac{d^2y}{dx^2} = -(M_0 + Py).$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichung lautet

$$y = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x - \frac{M_0}{P},$$

wenn unter α , wie schon früher, zur Abkürzung der Werth

$$\alpha = \sqrt{\frac{P}{E\Theta}}$$

verstanden wird, während A und B die beiden Integrationsconstanten sind. Für $x = 0$ muss y verschwinden, daher ist

$$B = \frac{M_0}{P}$$

zu setzen. Ferner muss wegen der Einspannung der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ sowohl für $x = 0$ als für $x = l$ verschwinden. Man hat

$$\frac{dy}{dx} = A\alpha \cos \alpha x - B\alpha \sin \alpha x$$

und daher zunächst $A = 0$ und ferner

$$B\alpha \sin \alpha l = 0.$$

In der letzten Gleichung ist sowohl der Faktor B als der Faktor α von Null verschieden, daher muss $\sin \alpha l = 0$ sein. Der Winkel αl ist nicht Null; damit der angenommene Gleichgewichtszustand bestehen kann, muss daher die Last P so weit gesteigert werden, bis $\alpha l = \pi$ oder ein Vielfaches von π geworden ist. Wollte man $\alpha l = \pi$ setzen, so wäre zwar die eine Grenzbedingung erfüllt, aber nicht zugleich die noch ausstehende, dass auch y für $x = l$ verschwinden muss. Diese Lösung würde daher für den von dem vorliegenden verschiedenen Fall passen, dass sich das rechte Ende des Stabes zwar nicht drehen, wohl aber frei in der Richtung der Y -Axe verschieben könnte. Um der letzten Grenzbedingung zu genügen, muss vielmehr auch

$$B \cos \alpha l - \frac{M_0}{P} = 0$$

oder $\cos \alpha l = +1$ sein und nicht gleich -1 , wie für $\alpha l = \pi$. Um den zur Untersuchung gestellten Fall zu verwirklichen, müssen wir daher die Last P noch weiter wachsen lassen, bis $\alpha l = 2\pi$ geworden ist. Setzt man in diese Gleichung den Werth von α ein und löst nach P auf, so erhält man

$$P = 4\pi^2 \frac{E \Theta}{l^2}. \quad (267)$$

Der kritische Werth der Belastung ist also bei unwandelbar eingespannten Enden viermal so gross als bei frei drehbaren Enden. Wenn P kleiner ist, kann der angenommene Gleichgewichtszustand nicht bestehen bleiben und der Stab streckt sich, wenn er sich selbst überlassen wird, wieder gerade. Im umgekehrten Falle schreitet dagegen die Biegung immer weiter fort, bis sie zum Zusammenbruche führt.

Natürlich wird durch die anfängliche Excentricität des Kraftangriffs u. s. f. der Bruch noch etwas beschleunigt und die darüber in den früheren Paragraphen durchgeführten Betrachtungen lassen sich fast ohne Aenderung auf den vorliegenden Fall übertragen; hier ist nur deshalb davon abgesehen worden, um die Untersuchung nicht zu weitläufig zu gestalten.

Endlich sei jetzt noch der Fall untersucht, dass der Stab nur am einen Ende als eingespannt, am anderen aber als frei drehbar befestigt angenommen werden kann. Die Untersuchung ist ganz ähnlich der vorigen. Man muss beachten, dass an dem drehbar befestigten Ende auch eine quer zur Stabaxe gerichtete



Abb. 66.

Kraft V übertragen werden muss, um dieses Ende gegen eine Verschiebung im Sinne der y -Axe zu schützen. Für das Biegemoment M im Querschnitte x erhält man

$$M = Py - Vx,$$

woraus der Reihe nach folgt

$$E \Theta \frac{d^2 y}{dx^2} = -Py + Vx,$$

$$y = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x + \frac{V}{P} x,$$

wenn α die frühere Bedeutung hat. Wegen $y = 0$ für $x = 0$ folgt $B = 0$ und wegen $y = 0$ für $x = l$

$$A = -\frac{Vl}{P \sin \alpha l}.$$

Damit sind die Integrationskonstanten bestimmt. Dagegen ist V noch unbekannt, während zugleich noch die Grenzbedingung $\frac{dy}{dx} = 0$ für $x = l$ zur Verfügung steht. Mit $B = 0$ hat man durch Differentiieren

$$\frac{dy}{dx} = A \alpha \cos \alpha x + \frac{V}{P},$$

also muss die Gleichung

$$0 = -\frac{V \alpha l \cos \alpha l}{P \sin \alpha l} + \frac{V}{P}$$

erfüllt sein. Die Auflösung nach V würde $V = 0$, hiermit aber auch $A = 0$ und schliesslich auch $y = 0$ liefern. Das ist natürlich ein möglicher Gleichgewichtszustand, nämlich jener, bei dem der Stab unter der Belastung geradlinig bleibt. Für diesen interessieren wir uns aber nicht und in der That

wird die vorstehende Gleichung bei einem beliebigen Werthe von V auch dann noch erfüllt, wenn

$$\frac{\alpha l \cos \alpha l}{\sin \alpha l} = 1 \quad \text{oder} \quad \alpha l = \operatorname{tg} \alpha l$$

ist. Dies ist eine transcendente Gleichung für αl , die unendlich viele Wurzeln hat; für uns kommt aber nur die kleinste auf $\alpha l = 0$ folgende in Betracht, da es sich nur darum handelt, wie weit wir P wachsen lassen müssen, um eine Ausbiegung, wie sie in Abb. 66 gezeichnet ist, eben noch aufrecht erhalten zu können. Man sieht leicht ein, dass αl jedenfalls grösser als π werden muss, um die Tangente des Winkels gleich dem Bogen zu machen und durch Probiren findet man, dass ungefähr

$$\alpha l = 4,49$$

die gesuchte Wurzel der Gleichung ist. Das Quadrat von 4,49 kann gleich 20 gesetzt werden und mit Rücksicht auf die Bedeutung von α erhält man daher

$$P = 20 \frac{E \Theta}{l^2}, \quad (268)$$

also ziemlich genau das Doppelte der Knickkraft für den Stab mit frei drehbaren Enden oder die Hälfte des für den Stab mit beiderseits eingespannten Enden gefundenen Werthes. Anstatt dessen kann man Gl. (268) auch dahin aussprechen, dass der am einen Ende eingespannte und am anderen drehbar gelagerte Stab dieselbe Knickfestigkeit hat, als wenn er beiderseits drehbar gelagert wäre, falls zugleich an Stelle der Länge l die Länge $\frac{l}{\sqrt{2}}$ genommen wird. Von dieser Zurückführung auf eine gleichwerthige Länge des in Spitzen gelagerten Stabes war schon in den Eingangssätzen dieses Paragraphen Gebrauch gemacht und sie ist überhaupt recht bequem. So kann auch Gl. (267) dahin gedeutet werden, dass als gleichwerthige Länge $\frac{l}{2}$ genommen werden muss, um den Fall des Stabes mit beiderseits eingespannten Enden auf den Normalfall der Spitzenlagerung zurückzuführen.

§ 60. Knicken bei gleichzeitiger Biegebungsbelastung.

Der Stab möge in der Mitte eine Biegebungsbelastung Q tragen (vgl. Abb. 67). Für das Biegebungsmoment im Querschnitte x erhält man

$$M = \frac{Q}{2} x + Py$$

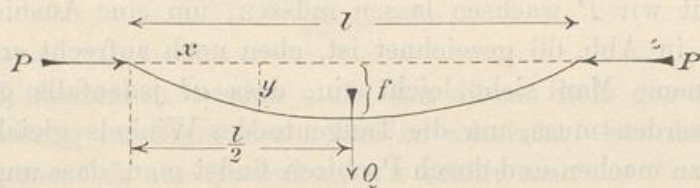


Abb. 67.

und hieraus

$$E\Theta \frac{d^2 y}{dx^2} = - \left(\frac{Q}{2} x + Py \right),$$

$$y = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x - \frac{Q}{2P} x.$$

Die elastische Linie zerfällt in zwei Äeste, die sich in der Mitte aneinanderschliessen. Für jeden Ast sind die Constanten A und B gesondert zu bestimmen; hier genügt es indessen der Symmetrie wegen, nur einen Ast näher ins Auge zu fassen.

Wir wählen den linken; für $x = 0$ muss $y = 0$ und für $x = \frac{l}{2}$ muss $\frac{dy}{dx} = 0$ sein. Die erste Grenzbedingung liefert $B = 0$ und aus der zweiten folgt

$$A = \frac{Q}{2P\alpha \cos \frac{\alpha l}{2}}.$$

Setzt man dies in die Gleichung für y ein und wählt darin nachträglich $x = \frac{l}{2}$, um die grösste Ausweichung, nämlich den Biegebungspfeil f zu erhalten, so wird

$$f = \frac{Q}{2P\alpha} \left\{ \operatorname{tg} \frac{\alpha l}{2} - \frac{\alpha l}{2} \right\}. \quad (269)$$

Die Formel liefert einen unendlich grossen Werth für f , wenn $\frac{\alpha l}{2}$ zu einem rechten Winkel, αl also $= \pi$ und daher $P = \pi^2 \frac{E\Theta}{l^2}$

wird. Die Biegungsbelastung ändert also in diesem Sinne nichts an der kritischen Belastung auf Zerknicken, die ebenso gross bleibt, als wenn Q nicht vorhanden wäre. Dieser Schluss ist aber mit Vorsicht aufzunehmen, denn er bezieht sich ja nur auf die rein elastischen Erscheinungen und nimmt auf die schon vor der Erreichung der kritischen Belastung eintretende Ueberschreitung der Proportionalitätsgrenze keine Rücksicht. So wie wir schon früher fanden, dass P_K wegen der Excentricität des Kraftangriffs u. s. f. kleiner ist als P_E , muss auch hier die wirkliche Knickbelastung kleiner ausfallen als der Euler'sche Werth und zwar um so mehr, je grösser Q ist.

Für die Spannung in einer Faser des mittleren Querschnitts erhält man bei Benutzung derselben Bezeichnungen wie bei der ähnlichen Untersuchung in § 58

$$\sigma = \frac{P}{F} \pm \left(\frac{Ql}{4} + Pf \right) \frac{a}{\Theta}.$$

In diese Gleichung ist f nach Gl. (269) einzuführen, ebenso für α der Werth einzusetzen und hierauf die Gleichung nach P aufzulösen, womit man ebenso wie in § 58 P_K erhält. Dabei tritt freilich die Schwierigkeit auf, dass die Gleichung transcendent ist; um darüber leichter hinweg zu kommen, ersetze ich Gl. (269) noch durch eine Näherungsformel, indem ich von der Reihenentwicklung

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \dots$$

Gebrauch mache, die convergent ist bis $x = \frac{\pi}{2}$. Bei Festigkeitsberechnungen wird es sich meistens um Lasten handeln, die erheblich unter der Bruchbelastung bleiben, da man noch eine gewisse Sicherheit nöthig hat. Jedenfalls ist daher auch $\frac{\alpha l}{2}$ bei einem Falle der praktischen Anwendung erheblich kleiner als $\frac{\pi}{2}$ und selbst noch kleiner als die Einheit. In diesem Falle convergirt die Reihe ziemlich schnell und für eine Annäherung wird es genügen, die drei ersten Glieder zu berücksichtigen. Man erhält dann an Stelle von Gl. (269)

$$f = \frac{Q\alpha^2 l^3}{48P} \left(1 + \frac{\alpha^2 l^2}{10}\right)$$

oder, wenn man noch den Werth von α einsetzt,

$$f = \frac{Ql^3}{48E\Theta} \left(1 + \frac{Pl^2}{10E\Theta}\right). \quad (270)$$

Das erste Glied in der Klammer entspricht dem Biegungs-
pfeile für $P = 0$ und stimmt auch in der That mit dem früher
für die Biegungsbelastung Q gefundenen Pfeile (Gl. 82) genau
überein. Schreiben wir für diesen Antheil, also auch für den
Faktor vor der Klammer f_0 und beachten wir, dass im zweiten
Gliede der Faktor 10 im Nenner nahezu mit π^2 übereinstimmt
und dass sich dieses Glied daher in der Form $\frac{P}{P_E}$ schreiben
lässt, so vereinfacht sich Gl. (270) noch weiter zu

$$f = f_0 \cdot \frac{P_E + P}{P_E}. \quad (271)$$

Die Gleichung für σ geht jetzt, nach Multiplikation mit F
und mit $F\sigma = P_D$ über in

$$P_D = P + \left(\frac{Ql}{4} + P \cdot \frac{P_E + P}{P_E} f_0\right) \frac{\alpha F}{\Theta}, \quad (272)$$

die ohne Weiteres nach P aufgelöst werden kann und damit
 P_K liefert. Solange P erheblich kleiner bleibt als P_E , erkennt
man übrigens schon aus Gl. (271), dass der Biegungs-
pfeil durch die Zufügung von P gegenüber f_0 nur wenig geändert
wird. Daraus ist zu schliessen, dass die Biegun-
gsspannungen auch nur ungefähr in demselben Verhältnisse wachsen, wozu
dann freilich noch die gleichförmig über den Querschnitt ver-
theilte Belastung $\frac{P}{F}$ kommt.

Nach Auflösung der quadratischen Gleichung (272) nach
 P hat man übrigens für f_0 nachträglich wieder den Werth
einzusetzen, für den es zur Abkürzung diene; von der weiteren
Ausrechnung, die gar keine Schwierigkeiten mehr bietet, möge
hier abgesehen werden.

Anmerkung. Eng verwandt mit dem hier besprochenen Falle ist ein anderer, der nicht ohne praktische Bedeutung ist und der vor Kurzem von Herrn M. Tolle ausführlich behandelt wurde (Zeitschr. d. V. D. Ing. 1897, S. 855). Man denke sich zunächst die Richtung der Kräfte P in Abb. 67 umgekehrt. Von einem Ausknicken kann dann zwar nicht mehr die Rede sein, da die Zugkraft P die durch die Biegungslast Q bewirkte Ausbiegung im Gegentheile zu verkleinern sucht. Dies hindert indessen nicht, dass die allgemeinen Betrachtungen zu Anfang des Paragraphen beibehalten werden können, falls man nur in den Formeln P überall negativ setzt.

Ferner denke man sich den Stab als eine dünne und lange Zugstange, etwa von kreisförmigem Querschnitte, die nur durch ihr Eigengewicht auf Biegung beansprucht wird. Auch dann kann man mit geringen Aenderungen die vorausgehenden Entwicklungen benutzen; man braucht nur das durch die Einzellast Q hervorgerufene Biegemoment durch das von der Eigenlast herrührende zu ersetzen. Schliesslich nehme man an, dass die Zugstange an beiden Enden festgehalten ist, so dass die zur Biegungslinie gehörige Bogensehne die unveränderliche Länge l behalten muss. Damit kommt man auf den von Tolle behandelten Fall; die zugehörige Biegungslinie wird von ihm als eine „steife Kettenlinie“ bezeichnet. Die Zugkraft P ist jetzt nicht mehr gegeben, sondern aus den Bedingungen der Aufgabe zu ermitteln. Die Lösung findet man natürlich im Wesentlichen auf dieselbe Art wie vorher, indem man zuerst die Differentialgleichung der elastischen Linie aufstellt, diese integriert und die Integrationsconstanten den Grenzbedingungen gemäss bestimmt, wobei sich auch der Werth von P ergibt. Man kann aus dieser Betrachtung nützliche Schlüsse über die beste Anordnung solcher Zugstangen ziehen, worüber aber hier nur auf die Quelle verwiesen werden kann.

§ 61. Knickformel von Navier, Schwarz, Rankine.

Die Lehre von der Knickfestigkeit hat eigenthümliche Wandlungen durchgemacht; von allen Formeln der Festigkeitslehre, die wir heute als richtig anerkennen, ist die Euler'sche Knickformel eine der ältesten. Zu dieser Anerkennung, dass sie wirklich richtig ist, d. h. dass sie mit den Thatsachen hinreichend genau in Uebereinstimmung steht, ist sie aber erst seit verhältnissmässig kurzer Zeit gelangt und selbst heute fehlt es ihr daran noch in manchen Kreisen.

Die Ursache für die auf den ersten Blick sehr befremdliche Erscheinung, dass man die Ergebnisse einer mathematischen Entwicklung verwarf, an der man keinen Fehler nachweisen konnte und auf deren Voraussetzungen man sich sonst bei allen Rechnungen stützte, besteht darin, dass die älteren Techniker so gewohnt waren, bei Festigkeitsberechnungen den Sicherheitsgrad nach der auftretenden grössten Spannung zu bemessen, dass sie dadurch unfähig wurden, einen Fall zu beurtheilen, bei dem dieser Maassstab keinen Sinn hatte. In der That, man versetze sich etwa in die Lage eines Baubeamten, von dem bei einer statischen Berechnung auf Grund irgend einer veralteten Verordnung der Nachweis verlangt wird, dass z. B. die Beanspruchung des Eisens 700 oder 1000 atm o. dgl. unter keinen Umständen überschreiten dürfe. Mit der Euler'schen Formel kann man dem Buchstaben dieser Verordnung überhaupt nicht gerecht werden, wenn es sich um eine Berechnung auf Knickfestigkeit handelt. Sehr oft würde, wenn man eine thatsächlich in einem solchen Stabe auftretende Druckspannung von 700 kg zulassen wollte, damit schon fast die Grenze des Ausknickens erreicht werden und oft genug liegt bei sehr schlanken Stäben die Spannung, die nicht überschritten werden darf, ohne dass die kritische Belastung erreicht wird, bei nur 200 oder 300 atm oder selbst noch niedriger. Man wird verstehen, dass der Baubeamte, von dem ein Nachweis verlangt wird, der nach der Euler'schen Formel ganz sinnlos ist, mit Vergnügen nach einer andern Formel greifen wird, gleichgiltig ob sie nun richtig oder falsch ist, wenn sie nur den Buchstaben der Vorschrift zu erfüllen gestattet. Daran allein, dass es auf diese Weise möglich gemacht wurde, den Sicherheitsgrad einer Construction in einer einzigen Ziffer für die zulässige Beanspruchung des Materials in atm auszudrücken, liegt es offenbar, dass sich namentlich die Bauingenieure so lange hartnäckig gegen die Anwendung der Euler'schen Formel gesträubt haben.

Nun will ich nicht etwa mit diesen Bemerkungen einen Tadel darüber verbinden, dass man sich überhaupt gegen die

bedingungslose Annahme der Euler'schen Formel sträubte; es wird gar vieles errechnet, was nachher mit den Thatsachen arg im Widerspruche steht und dem Praktiker kann man es daher nicht verdenken, wenn er einer Rechnung, die ihm missbehagte, einfach misstraute, anstatt sie eingehend zu prüfen. Das Misstrauen war also an sich berechtigt; falsch war nur, dass man die Formel ganz verwarf und eine andere an ihre Stelle setzte, deren theoretische Herleitung auf sehr viel schwächeren Füßen stand, ohne dass man sich darum gekümmert hätte, welche von beiden Formeln die Erfahrungen am besten wiedergibt.

Aus den Versuchen, die mein Vorgänger Bauschinger im Jahre 1887 angestellt hat, geht hervor, dass die Euler'sche Formel mit den Thatsachen weit besser übereinstimmt als die Schwarz'sche u. s. f. und durch die sehr eingehenden und sorgfältigen Versuche Tetmajer's in dem Züricher Laboratorium wurde dies noch weiter bestätigt. Auch ich selbst habe einige Knickversuche angestellt, die zur Bestätigung der Euler'schen Theorie dienen.

Freilich hat dies nicht verhindern können, dass sich in den letzten Jahren (also seit dem Erscheinen der 1. Aufl. dieses Bandes) ein lebhafter Widerspruch gegen die von v. Tetmajer aus seinen Versuchen gezogenen Folgerungen geltend machte. In dieser Hinsicht verweise ich besonders auf die Abhandlungen von v. Emperger in der Zeitschr. d. Österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1897. Zu einer weitergehenden Aenderung des Textes sehe ich mich indessen hierdurch nicht veranlasst, da mein Vertrauen in die Zuverlässigkeit der Tetmajer'schen Folgerungen dadurch nicht erschüttert wurde. Es mag daher genügen, die sich für die Streitfrage näher Interessirenden auf die Quelle zu verweisen.

Ausserdem sei noch eine sehr fleissig bearbeitete Abhandlung von Ostfeld in der Z. d. Ver. D. Ing. 1898, S. 1462 angeführt, mit der ich mich in den meisten Punkten einverstanden erklären kann. Aber auch hier scheint mir ein Hinweis auf die beachtenswerthe Arbeit zunächst ausreichend zu sein.

Von der Erörterung der Schwarz-Navier-Rankine'schen Theorie darf freilich bei der gegenwärtigen Sachlage hier noch weniger als früher abgesehen werden.

Die Formel, die ich jetzt ableiten will, ist zu verschiedenen Zeiten auf verschiedenen Wegen gefunden worden und sie wird daher bald als die Navier'sche, bald als die Schwarz'sche, bald als die Rankine'sche bezeichnet. Man geht bei ihrer Ableitung am einfachsten von der an sich ganz berechtigten Annahme aus, dass die Kraft P wegen zufälliger Abweichungen der Stabaxe von der geraden Linie und wegen der unvermeidlichen Excentricität des Kraftangriffs von vornherein an einem Hebelarme p wirkt. Für diesen Hebelarm setze man hypothetisch

$$p = \alpha \frac{l^2}{a} \quad (273)$$

worin α eine absolute Zahl ist, die aus Versuchen zu bestimmen ist. Zur Rechtfertigung für den Ansatz (273) kann man anführen, dass Abweichungen der genannten Art um so eher eintreten, je grösser die Länge l im Vergleiche zu dem Abstände a der äussersten Faser von der in Frage kommenden Schwerlinie ist. Freilich liesse sich diese Ueberlegung auch noch auf andere Art zum Ausdrucke bringen und Gl. (273) haftet daher eine Willkür an, die nur durch die nachträgliche Bestätigung durch die Erfahrung gehoben werden könnte. Nimmt man Gl. (273) aber an, so ist damit der Fall der Knickfestigkeit auf den der gewöhnlichen excentrischen Druckbelastung zurückgeführt. Für die Spannung an der äussersten Faser erhält man

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{Pp}{\Theta} a = \frac{P}{F} \left(1 + \alpha \frac{l^2}{t^2} \right) \quad (274)$$

wenn mit t der Trägheitsradius bezeichnet wird.

Der zulässige Werth der Druckbelastung folgt daraus

$$P_{zul} = \frac{F \sigma_{zul}}{1 + \alpha \frac{l^2}{t^2}} \quad (275)$$

und das ist die Formel, um deren Ableitung es sich handelte.

Wenn man es als einen Vorzug betrachten will, dass die zulässige Beanspruchung auf Zerknicken P_{zul} von der zulässigen Druckspannung σ_{zul} des Baustoffes abhängig gemacht wird, kommt ihr dieser Vorzug in der That zu. Wichtiger ist aber natürlich die Frage, inwiefern die Gleichung mit dem tatsächlichen Verhalten eines auf Druck beanspruchten Stabes übereinstimmt und ich habe schon erwähnt, dass deren Beantwortung zu Ungunsten der Gl. (275) ausfällt. Natürlich ist es immer möglich, Gl. (275) zur Uebereinstimmung mit irgend einem bestimmten Versuchsergebnisse zu bringen, wenn man die Constante α passend wählt. In dieser Hinsicht haben alle Formeln, in die man einen aus den Versuchen selbst erst zu bestimmenden Coefficienten einführt, einen Vorsprung vor anderen, die auf rationellerem Wege abgeleitet sind, wie z. B. die Euler'sche Formel, die schon durch einen einzigen Versuch widerlegt werden könnte, wenn sie auf einer falschen Grundlage beruhte. Es ist auch klar, dass man Gl. (275) ohne Besorgniss auf eine ganze Gruppe verwandter Fälle anwenden kann, wenn man α aus einem Knickversuche entnimmt, der unter ganz ähnlichen Umständen angestellt wurde. Bei Festigkeitsberechnungen dieser Art handelt es sich ja ohnehin mehr um eine ungefähre Abschätzung als um die Gewinnung genau richtiger Werthe. Eine wissenschaftliche Bedeutung könnte man Gl. (275) aber nur dann zusprechen, wenn die Constante α nur von dem Baustoffe abhängig wäre und bei allen Längenverhältnissen des Stabes wirklich als constant betrachtet werden dürfte. Das trifft aber, wie namentlich aus den Versuchen v. Tetmajer's hervorgeht, keineswegs zu. In jedem andern Falle der Anwendung müsste man, um ganz sicher zu gehen, einen anderen Werth von α einführen und die Brauchbarkeit des Resultats hängt ganz davon ab, ob man den im gegebenen Falle zutreffenden Werth von α richtig eingeschätzt hat.

§ 62. Ausknicken einer auf Verdrehung beanspruchten langen Welle.

Von allen Fällen des labilen elastischen Gleichgewichts ist der seither behandelte der gewöhnlichen Knickfestigkeit praktisch zwar weitaus der wichtigste. Daneben kommen aber auch noch andere vor und schon in § 49 wurde ein solcher behandelt. Hier soll noch der zuerst von Greenhill untersuchte Fall des labilen elastischen Gleichgewichts einer auf Verdrehung beanspruchten langen dünnen Welle von kreisförmigem Querschnitte besprochen werden. Wenn eine solche Welle hinreichend lang im Vergleiche zu ihrem Durchmesser ist, befindet sie sich nämlich im geraden Zustande im labilen Gleichgewichte, grade so wie ein auf Druck beanspruchter sehr schlanker Stab. Sobald durch zufällige Umstände die geringste Abweichung der Mittellinie von einer Geraden veranlasst wird, steigert sich die Abweichung unausgesetzt, bis sie zum Bruche führt; wir können diese Erscheinung ebenfalls als ein Ausknicken bezeichnen.

Die Sache selbst kennt wohl Jedermann aus der alltäglichen Erfahrung, zwar nicht aus der Erfahrung an eigentlichen Wellenleitungen, bei denen sie nur in ganz ausnahmsweisen Fällen vorliegen könnte, wohl aber aus der Erfahrung mit einem dünnen Faden oder auch mit einem dünnen Drahte. Wenn ein Faden an beiden Enden festgehalten und dann verwunden wird, beginnt er, wenn die Verwindung hinreichend weit vorgeschritten ist, seitlich auszuweichen und sich spiralig aufzurollen. Man macht davon Gebrauch, wenn man den langen Faden zu einem doppelten von der halben Länge zusammenlegen will. Die beiden Theile, die man zusammenlegt, wickeln sich dann ohne weiteren Zwang in Schraubenlinien umeinander und bilden dadurch nachher ein gut zusammenhängendes Ganzes. Auch Metalldrähte, die man bei Festigkeitsprüfungen auf Verwinden beansprucht, brechen sehr häufig nicht einfach durch Versagen der Torsionsfestigkeit, sondern erst nach vorausgehendem Ausknicken, d. h. nach einer Formänderung,

bei der die Mittellinie in eine langgestreckte Schraubenlinie übergeht.

Zur Untersuchung dieser Erscheinung kann man ähnlich verfahren, wie in § 59 bei der Erörterung besonderer Fälle der gewöhnlichen Knickfestigkeit. Man sehe zu, wie gross das verwindende Moment M sein muss, um eine Ausbauchung, die als bereits vorhanden vorausgesetzt wird, gerade aufrecht zu erhalten. Bei einem kleineren Werthe von M wird sich die Mittellinie der Welle von selbst wieder gerade strecken und bei jedem grösseren Werthe wird die Ausbauchung weiter fortschreiten. Das gefundene M stellt also die kritische Verdrehungsbelastung der Welle dar.

In Abb. 68 ist in axonometrischer Zeichnung die Schraubenlinie angegeben, in die die Mittellinie der Welle übergegangen sein mag. Zur besseren Orientirung ist auch der Cylinder angedeutet, auf dem

die Schraubenlinie liegt. Der Querschnitt der Welle ist dagegen weggelassen; mit dem gezeichneten Cylinder hat daher der Umriss der

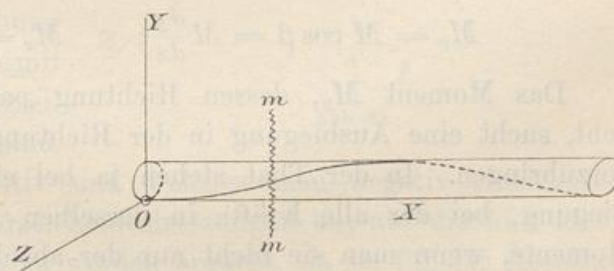


Abb. 68.

Welle selbst nichts gemein. Die anfängliche Lage der Wellenmittellinie im unverdrehten Zustande möge mit der Erzeugenden X des Cylinders zusammenfallen; dass sie überhaupt mit einer Cylindererzeugenden zusammenfallen muss, folgt daraus, dass die Enden der Wellenmittellinie gegen eine seitliche Ausweichung gestützt sind.

Man lege irgend einen Querschnitt mm durch die Welle und bringe daran das verdrehende Moment M an. Dieses Moment ist eine gerichtete Grösse, die parallel zur X -Axe geht. Wir zerlegen es in zwei Componenten, von denen die eine in die Richtung der Tangente an die Schraubenlinie fällt und die zweite senkrecht dazu steht. Die erste Componente entspricht

den Torsionsspannungen im Querschnitte der Welle und die zweite hält bei passender Grösse die Biegung der Wellenmittellinie aufrecht.

Rechtwinklig zur X -Axe seien noch zwei Coordinaten-Axen der y und z angenommen. Die Winkel, die die Tangente an die Schraubenlinie mit den Coordinatenrichtungen bildet, seien mit α , β , γ bezeichnet. Dann ist genau genug $\cos \alpha = 1$, dagegen

$$\cos \beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos \gamma = \frac{dz}{ds}.$$

Hier sind unter y , z Coordinaten eines Punktes der Wellenmittellinie und unter ds ein Längenelement dieser Linie zu verstehen. Zerlegt man jetzt das ganze, in der Richtung der X -Axe gehende Verdrehungsmoment M in drei Componenten, von denen eine in die Richtung von ds und die anderen in die Richtungen der Y - und Z -Axe fallen, so hat man für letztere

$$M_y = M \cos \beta = M \frac{dy}{ds}; \quad M_z = M \frac{dz}{ds}.$$

Das Moment M_y , dessen Richtung parallel zur Y -Axe geht, sucht eine Ausbiegung in der Richtung der Z -Axe hervorzubringen. In der That stehen ja bei einer gewöhnlichen Biegung, bei der alle Kräfte in derselben Ebene liegen, die Momente, wenn man sie nicht nur der absoluten Grösse nach betrachtet, sondern sie als gerichtete Grössen auffasst, alle senkrecht zur Belastungs- oder zur Biegungsebene. So ist es auch hier und die doppelte Krümmung der elastischen Linie wird durch das Zusammenwirken von M_y und M_z veranlasst. Nach dem Superpositionsgesetze können wir die Wirkungen von M_y und M_z gesondert betrachten und beide nachträglich zusammensetzen. Für die Wirkung von M_y für sich gilt die Differentialgleichung der elastischen Linie in der Form

$$E \Theta \frac{d^2 z}{dx^2} = - M_y = - M \frac{dy}{ds}$$

und dazu kommt noch für die andere Ausbiegungsrichtung die Gleichung

$$E \Theta \frac{d^2 y}{dx^2} = - M \frac{dz}{ds}.$$

Die Vorzeichen in diesen beiden Gleichungen sind indessen noch zweifelhaft und bedürfen einer besonderen Untersuchung. Angenommen, $y, z, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ seien an der betrachteten Stelle alle positiv und ebenso M_y, M_z . Wenn dann M_y einer Drehung im Sinne des Uhrzeigers, also in der Richtung von der X- zur Z-Axe entspricht (vgl. Abb. 69), trifft dies auch für M_z zu, die Drehung geht also hier von der Y- zur X-Axe. Auf die X-Axe bezogen, gehen daher beide Drehungen in verschiedener Richtung. Daraus folgt, dass bei gleichen Vorzeichen von M_y und M_z beide in die Differential - Gleichung der elastischen Linie mit verschiedenen Vorzeichen einzuführen sind.

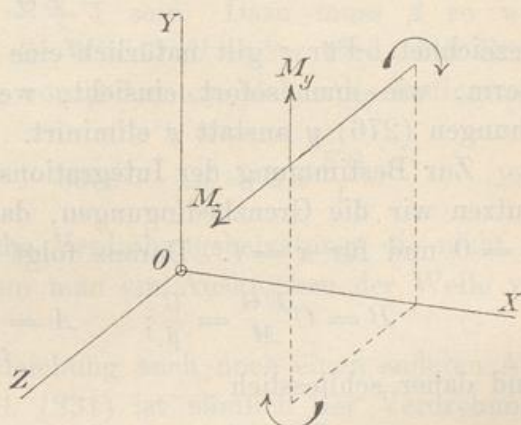


Abb. 69.

Welches man positiv und welches man negativ einzusetzen hat, hängt von Vorzeichenfestsetzungen ab, auf die hier nicht weiter eingegangen zu werden braucht, da sie für das Resultat, das ich hier ableiten will, gleichgültig sind.

Schreibt man noch dx an Stelle von ds , so gehen jetzt die vorigen Gleichungen in die genauere Form

$$\left. \begin{aligned} E\Theta \frac{d^2 z}{dx^2} &= \pm M \frac{dy}{dx} \\ E\Theta \frac{d^2 y}{dx^2} &= \mp M \frac{dz}{dx} \end{aligned} \right\} \quad (276)$$

über. Die erste liefert nach Integration

$$\frac{dz}{dx} = \pm \frac{M}{E\Theta} y \pm C$$

und dies setze ich in die zweite Gleichung ein. Diese geht dadurch über in

$$E\Theta \frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{M^2}{E\Theta} y - CM. \quad (277)$$

Die Lösung dieser Gleichung, die ganz der Euler'schen Gleichung für den Fall der gewöhnlichen Knickfestigkeit entspricht, lautet

$$y = A \sin \beta x + B \cos \beta x - C \frac{E \Theta}{M}, \quad (278)$$

wenn man mit β zur Abkürzung den Werth

$$\beta = \pm \frac{M}{E \Theta} \quad (279)$$

bezeichnet. Für z gilt natürlich eine Gleichung von derselben Form, wie man sofort einsieht, wenn man aus den Gleichungen (276) y anstatt z eliminirt.

Zur Bestimmung der Integrationsconstanten A und B benutzen wir die Grenzbedingungen, dass $y = 0$ sein muss für $x = 0$ und für $x = l$. Daraus folgt

$$B = C \frac{E \Theta}{M} = \frac{C}{\beta}; \quad A = \frac{C}{\beta} \cdot \frac{1 - \cos \beta l}{\sin \beta l}$$

und daher schliesslich

$$y = \frac{C}{\beta} \left\{ \frac{\sin \beta x}{\sin \beta l} (1 - \cos \beta l) + \cos \beta x - 1 \right\}. \quad (280)$$

Die Integrations-Constante C bleibt zunächst noch unbekannt. Wir differentiiren jetzt y zweimal und setzen den zweiten Differentialquotienten in die zweite der Gleichungen (276) ein, um z zu erhalten. Wir finden

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - C \beta \left\{ \frac{\sin \beta x}{\sin \beta l} (1 - \cos \beta l) + \cos \beta x \right\} = - \beta \frac{dz}{dx}$$

und daher nach einmaliger Integration

$$z = \frac{C}{\beta} \left\{ \frac{\cos \beta x}{\cos \beta l} (\cos \beta l - 1) + \sin \beta x \right\} + K. \quad (281)$$

Auch z muss für $x = 0$ und für $x = l$ verschwinden. Die erste Bedingung liefert die neue Integrations-Constante K

$$K = \frac{C}{\beta} \frac{1 - \cos \beta l}{\sin \beta l},$$

so dass z übergeht in

$$z = \frac{C}{\beta} \left\{ \frac{(1 - \cos \beta x)(1 - \cos \beta l)}{\sin \beta l} + \sin \beta x \right\}. \quad (282)$$

Die andere Grenzbedingung dagegen lehrt, dass zur Aufrechterhaltung des angenommenen Gleichgewichtszustandes ohne Rücksicht auf die Grösse von C , d. h. auf die Grösse der Ausbiegung

$$(1 - \cos \beta l)^2 + \sin^2 \beta l = 0$$

sein muss. Damit eine Summe von zwei Quadraten verschwinde, muss jedes Quadrat für sich verschwinden, also muss $\sin \beta l = 0$ und $\cos \beta l = +1$ sein. Dazu muss β so weit angewachsen sein, dass der Winkel $\beta l = 2\pi$ wird. Mit Rücksicht auf die Bedeutung von β hat man daher die Bedingungs-
gleichung

$$\frac{Ml}{E\Theta} = 2\pi \quad \text{oder} \quad M = 2\pi \frac{E\Theta}{l}. \quad (283)$$

Das ist die kritische Verdrehungsbelastung, die nicht erreicht werden darf, wenn man ein Ausknicken der Welle vermeiden will.

Man kann dieser Gleichung auch noch einen anderen Ausdruck geben. Nach Gl. (231) ist nämlich der Verdrehungswinkel $\Delta\varphi$, der durch das Moment M veranlasst wird,

$$\Delta\varphi = \frac{2Ml}{\pi a^4 G} = \frac{Ml}{2\Theta G}.$$

Setzt man in diese Gleichung den kritischen Werth von M aus Gl. (283) ein, so erhält man

$$\Delta\varphi = \pi \frac{E}{G}. \quad (284)$$

Also erst dann, wenn der Verdrehungswinkel etwas mehr als eine Umdrehung beträgt, kann nach dieser Formel ein Ausknicken eintreten. Bei Stahlwellen müsste daher die Länge etwa das 3000fache des Durchmessers betragen, wenn das Ausknicken früher als die Ueberwindung der gewöhnlichen Torsionsfestigkeit eintreten sollte. Indessen ist zu beachten, dass hierbei noch keine Rücksicht auf die schon vorher vorhandenen zufälligen Abweichungen der Wellenmittellinie von einer Geraden u. s. w. genommen ist. Durch solche zufällige Umstände und ferner durch die Ueberschreitung der Elastizitätsgrenze kann die kritische Länge, von der ab das Aus-

knicken beginnt, ganz bedeutend herabgesetzt werden. Auch in dieser Hinsicht gleicht der Fall vollständig dem der gewöhnlichen Knickfestigkeit. Da die hier besprochenen Knickerscheinungen praktisch minder wichtig sind, soll indessen von einem weiteren Eingehen darauf abgesehen werden.

Aufgaben.

45. Aufgabe. Bei welchem Verhältnisse der Querschnittsseite a zur Länge l beginnt die Knickgefahr für einen quadratischen Stab nach der Euler'schen Formel?

Lösung. Man setze

$$\frac{\pi^2 E \Theta}{l^2} = F \sigma$$

und verstehe unter σ die Proportionalitätsgrenze für Druck. Da $\Theta = \frac{a^4}{12}$ und $F = a^2$ ist, erhält man durch Auflösung der Gleichung nach l

$$l = a\pi \sqrt{\frac{E}{12\sigma}}.$$

Wenn z. B. für Flusseisen $E = 2100000$, $\sigma = 2000$ atm. gesetzt wird, liefert dies

$$\frac{l}{a} = 29,4.$$

Bei der Ableitung ist vorausgesetzt, dass die Stabenden frei drehbar sind. — Bei einem kleineren Längenverhältnisse ist indessen die bloße Berechnung auf gleichförmig vertheilte Druckbelastung immer noch bedenklich und man thut dann besser, die Tetmajer'sche Formel anzuwenden. — Ganz ähnlich ist natürlich bei anderen Querschnittsformen zu verfahren.

46. Aufgabe. Wie gross ist die Last, die eine gusseiserne Säule von 20 cm äusserem Durchmesser und 2 cm Wandstärke bei 6 m Höhe a) nach der Euler'schen, b) nach der Schwarz'schen Formel mit Sicherheit tragen kann, wenn $E = 1000000$ atm, $\sigma_{zul} = 700$ atm, $\alpha = 0,0002$ gesetzt wird?

Lösung. Die Querschnittsfläche F ist

$$F = \pi(10^2 - 8^2) = 113 \text{ cm}^2.$$

Das Trägheitsmoment Θ ist

$$\Theta = \frac{\pi}{4}(10^4 - 8^4) = 4630 \text{ cm}^4 \quad \text{und} \quad t^2 = \frac{4630}{113} = 41 \text{ cm}^2.$$

Bei Anwendung der Euler'schen Formel setzen wir voraus, dass das obere Ende der Säule durch das Gebälk, das sie trägt, gegen eine Verschiebung in horizontaler Richtung gestützt sei. Gewöhnlich wird dies zutreffen; natürlich ist aber im gegebenen Falle sorgfältig darüber nachzudenken, ob die Voraussetzung wirklich berechtigt ist. Sonst ist die doppelte Länge in die Formel einzuführen. Dagegen sehen wir von der Berücksichtigung einer etwaigen Einspannung der Enden der Sicherheit wegen ab. Die Knicklast wird dann nach der Euler'schen Formel

$$P_E = \pi^2 \frac{E \Theta}{l^2} = 10 \cdot \frac{10^6 \cdot 4630}{600^2} = 128600 \text{ kg.}$$

Man pflegt bei Gusseisen eine 6-fache Sicherheit gegen Ausknicken zu verlangen, daher setzen wir

$$P_{zul} = \frac{1}{6} P_E = 21400 \text{ kg.}$$

Nach der Schwarz'schen Formel wird dagegen

$$P_{zul} = \frac{F \cdot \sigma_{zul}}{1 + \alpha \frac{l^2}{t^2}} = \frac{113 \cdot 700}{1 + 2 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{600^2}{41}} = 28600 \text{ kg.}$$

Ich selbst würde dem ersten Resultate den Vorzug geben, hätte aber auch gegen die Belastung mit 28600 kg nicht viel einzuwenden, da der Sicherheitsgrad im ersten Falle ziemlich willkürlich eingeschätzt ist.

47. Aufgabe. Ein aufrecht stehender Stab ist am unteren Ende fest eingespannt. Das obere Ende ist frei drehbar und kann sich zugleich in horizontaler Richtung etwas verschieben. Dabei soll aber ein elastischer Widerstand auftreten, der der Grösse der Ausweichung proportional ist. Man denke sich etwa das obere Ende durch horizontale Zugstangen gehalten, die bei einer Ausweichung des Befestigungspunktes in Spannung gerathen. Man soll die Knickfestigkeit des Stabes berechnen.

Lösung. Die Ausweichung des oberen Endes sei y_0 und von diesem Ende aus seien die Abscissen x gerechnet. Dann tritt hier eine horizontale Kraft H auf, die

$$H = cy_0$$

gesetzt werden kann. Der Faktor c hängt von der Elasticität der Zugstangen ab, die das obere Ende halten und ist hier als gegeben zu betrachten. Für den Querschnitt mit der Abscisse x hat man

$$M = Hx + P(y - y_0)$$

und die Gleichung der elastischen Linie lautet

$$E\Theta \frac{d^2 y}{dx^2} = -cy_0x - Py + Py_0.$$

Die allgemeine Lösung ist

$$y = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x - \frac{c}{P} y_0 x + y_0,$$

wenn α dieselbe Bedeutung wie früher hat. Für $x = 0$ muss $y = y_0$ sein; daraus folgt $B = 0$. Ferner ist für $x = l$ sowohl y als $\frac{dy}{dx}$ gleich Null. Dies liefert die Gleichungen

$$0 = A \sin \alpha l - \frac{c y_0 l}{P} + y_0,$$

$$0 = \alpha A \cos \alpha l - \frac{c y_0}{P}.$$

Löst man beide nach A auf, so erhält man

$$A = y_0 \cdot \frac{cl - P}{P \sin \alpha l}; \quad A = y_0 \cdot \frac{c}{P \alpha \cos \alpha l}.$$

Damit diese Gleichungen mit einander bestehen können, muss

$$\frac{cl - P}{\sin \alpha l} = \frac{c}{\alpha \cos \alpha l}$$

sein. In anderer Form lässt sich diese Bedingungsgleichung auch schreiben

$$\operatorname{tg} \alpha l = \alpha l - \frac{\alpha P}{c}$$

oder, wenn man P in α ausdrückt,

$$\operatorname{tg} \alpha l = \alpha l - (\alpha l)^3 \cdot \frac{E\Theta}{cl^3}.$$

Die kleinste Wurzel dieser transcendenten Gleichung, die im einzelnen Falle durch Probieren aufzulösen ist, liefert αl und hiermit die Knicklast P .

Setzt man $c = \infty$, so ist der Stab oben ganz festgehalten und wir kommen damit auf den schon in § 59 ausführlich behandelten Fall. Wenn umgekehrt $c = 0$ gesetzt wird, ist das obere Stabende in horizontaler Richtung frei beweglich und die Gleichung geht über in $\operatorname{tg} \alpha l = \pm \infty$. Diese liefert die Lösung $\alpha l = \frac{\pi}{2}$ und daher

$$P = \frac{\pi^2 E \Theta}{4 l^2},$$

wie auch schon in den Eingangssätzen von § 59 durch eine einfache Betrachtung festgestellt worden war.

48. Aufgabe. Der Querschnitt eines Stabes, der an beiden Enden in Spitzen gelagert ist, sei in der Mitte auf eine Strecke l' , die klein gegenüber der ganzen Stablänge ist, durch Einschnitte verschwächt, so dass das kleinste Trägheitsmoment des Querschnitts dadurch von Θ auf Θ' herabgesetzt wird. Man soll die Knickfestigkeit des verschwächten Stabes mit der des unverschwächten vergleichen.

Lösung. Der Winkel, um den sich die Endquerschnitte des kurzen mittleren Stückes bei gegebenem Bieugungsmomente gegen einander verdrehen, ist in dem Verhältnisse $\frac{\Theta}{\Theta'}$ grösser, als wenn der Querschnitt unverändert durchginge. Man denke sich nun einen zweiten Stab von überall gleichem Trägheitsmomente Θ , aber von etwas grösserer Länge, so nämlich, dass das Mittelstück von der Länge l' durch ein solches von der Länge $l' + l''$ ersetzt ist, wenn

$$l'' = \frac{\Theta - \Theta'}{\Theta'} l'$$

genommen wird. Dann würden sich die Endquerschnitte des Mittelstückes dieses Stabes bei gegebenem Bieugungsmomente um denselben Winkel gegen einander verdrehen, wie beim verschwächten Stabe. Falls nun das Mittelstück an und für sich kurz ist, wird auch der Bieugungspfeil in der Mitte beim zweiten Falle nicht merklich grösser sein als im ersten Falle, wenn die Bieugungslinien in den äusseren Stababschnitten in beiden Fällen mit einander übereinstimmen. Man erkennt daraus, dass die Querschnittsverchwächung in der Mitte so wirkt, als wenn der Querschnitt unverändert geblieben, die Stablänge aber um den vorher berechneten Betrag l'' vergrössert wäre. Danach kann die Knicklast leicht berechnet werden.

Zur Prüfung des hier erörterten Falles habe ich eine grössere Versuchsreihe angestellt, und durch die Versuchsergebnisse wurde ich erst zu der hier gegebenen Lösung geführt. Dabei zeigte sich indessen, wie auch von vornherein zu erwarten war, dass man für l' einen etwas grösseren Werth als die Länge einzusetzen hat, auf die sich die Verschwächung des Stabquerschnitts erstreckt. Auch in den unmittelbar an das Mittelstück angrenzenden Theilen des Stabes kann sich nämlich nicht sofort der volle Querschnitt wirksam erweisen; die an die Lücke angrenzenden Kanten müssen vielmehr ebenfalls zunächst noch spannungslos sein. Bei meinen

Versuchen zerknickte ich Winkeleisen, bei denen der Querschnitt durch beiderseitige Einschnitte von 2,5 bis 60 mm Länge (in der Richtung der Stabaxe gemessen) so geschwächt war, dass Θ' nur $\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{5}$ von Θ war. Dabei musste man die Einschnittlänge um 2 bis 4 cm vermehren, um die vorausgehende Rechnung in Uebereinstimmung mit den Versuchsergebnissen zu bringen.