Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

Verträglichkeit desselben mit den allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen und mit dem Elasticitätsgesetze.

urn:nbn:de:hbz:466:1-84594

$\tau_{yx} = \tau_{xy}$ und $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ zu setzen ist, so vereinfacht sich jene Gleichgewichtsbedingung hier zu

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = -\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}.$$

Nach Eintragen der Werthe aus den Gl. (237) und (238) geht sie über in

$$-2yz\frac{c_1}{a^2} = 2yz\frac{k_1}{b^2}.$$

Sie wird also in der That identisch erfüllt, falls man

$$k_1 = -\frac{c_1 b^2}{a^2} \tag{239}$$

setzt und dies zeigt uns zugleich, dass das in dieser Weise näher bestimmte System der Spannungen vom Gesichtspunkte der Statik starrer Körper aus möglich ist. Eine andere Frage wäre es natürlich, ob dieses Spannungssystem zugleich mit den elastischen Eigenschaften eines bestimmten Materials, z. B. mit dem Hooke'schen Gesetze in Uebereinstimmung stehe. Auf eine solche Untersuchung haben wir aber hier, in der Absicht zu einem möglichst einfachen, wenn auch nur näherungsweise richtigen Resultate zu gelangen, von vornherein verzichtet. Mit Rücksicht auf Gl. (239) geht jetzt Gl. (238) über in

$$\tau_{xz} = -\frac{c_1 b^2}{a^2} y + \frac{c_1}{a^2} yz^2. \tag{240}$$

Es bleibt jetzt nur noch die Bestimmung der einzigen, bisher unbekannt gebliebenen Constanten c_1 übrig und man sieht leicht ein, dass diese aus der Momentengleichung, ganz wie früher bei dem elliptischen Querschnitte, berechnet werden kann. Die Momentengleichung lautet

$$M = \int dF(\tau_{xy} \cdot z - \tau_{xz} \cdot y)$$

oder nach Einsetzen der Werthe aus (237) und (240)

$$M = c_1 \int \left(z^2 - 2\frac{z^2 y^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} y^2 \right) dF.$$

Die rechte Seite zerfällt in drei Glieder, von denen das erste und das letzte ohne Weiteres angegeben werden können, da die Trägheitsmomente des Rechtecks darin auftreten. Das zweite Glied führt auf ein Moment vierten Grades des Querschnitts und muss besonders berechnet werden. Wir dehnen die Integration zunächst auf den im ersten Quadranten liegenden Theil des Querschnitts aus und finden dafür

$$\int y^2 z^2 dF = \int_0^b dz \cdot z^2 \int_0^a y^2 dy = \frac{a^3 b^3}{9}.$$

Für den ganzen Querschnitt liefert das Integral den vierfachen Werth. — Die Momentengleichung geht hiermit über in

$$M = c_1\left(\frac{4\,ab^3}{3} - \frac{8\,ab^3}{9} + \frac{4\,ab^3}{3}\right) = c_1 \cdot \frac{16\,ab^3}{9}.$$

Daraus folgt für die Constante c_1

$$c_1 = \frac{9\,M}{16\,ab^3}. \tag{241}$$

Die Spannungscomponenten sind hiermit vollständig bestimmt; wir schreiben dafür

$$\left.\begin{aligned} \tau_{xy} &= \frac{9\,M}{16\,ab^3} z \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right) \\ \tau_{xz} &= -\frac{9\,M}{16\,a^3 b} y \left(1 - \frac{z^2}{b^2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{242}$$

Längs der beiden Symmetrieaxen stehen demnach die Spannungen τ rechtwinklig zu dem vom Ursprunge gezogenen Radiusvector und sie wachsen proportional mit diesem. Am Umfange sind die Spannungen parallel mit den Umfangsseiten gerichtet und die Spannungsvertheilung ist eine parabolische; in den Ecken werden die Spannungen zu Null und sie wachsen von da nach den Mitten der Umfangsseiten hin, wo sie ein Maximum erreichen. Längs einer Diagonale sind die Spannungen überall parallel zur anderen Diagonale gerichtet und das Spannungsvertheilungsdiagramm ist eine cubische Parabel. Für einen anderen Radiusvector, der vom Ursprunge aus gezogen wird, ändert die Spannung τ fortwährend ihre Richtung, wenn man weiter nach aussen hin geht.

Es fragt sich jetzt noch, an welcher Stelle τ den absolut grössten Werth annimmt. Nach dem Pythagoräischen Satze erhält man aus den Gleichungen (242)

$$\tau^2 = \left[\frac{9\,M}{16\,a^3 b^3}\right]^2 \cdot \{z^2(a^2 - y^2)^2 + y^2(b^2 - z^2)^2\} \cdot \quad (242\,\text{a})$$

Für ein analytisches Maximum müssen die partiellen Differentialquotienten von τ^2 nach y und z, oder anstatt dessen auch nach y^2 und z^2 gleich Null sein; also

$$0 = (a^2 - y^2)^2 - 2\,y^2(b^2 - z^2); \quad 0 = -2\,z^2(a^2 - y^2) + (b^2 - z^2)^2. \quad (243)$$

Die Auflösung dieser Gleichungen nach y und z liefert die Punkte, für die τ^2 zu einem Maximum oder Minimum wird. Zu ihnen gehören zunächst die vier Eckpunkte des Rechtecks; die Abscissen der übrigen werden durch Auflösung der Gleichung

$$\frac{(a^2 - y^2)^3}{8\,y^4} = b^2 - \frac{(a^2 - y^2)^2}{2\,y^2}$$

erhalten. Die Gleichung ist vom dritten Grade in Bezug auf y^2. Wir lösen sie nur für den besonderen Fall auf, dass $a = b$, dass also der Querschnitt der Welle ein Quadrat ist. Sie geht dann nach Auflösen der Klammern über in

$$3\,y^6 - 13\,a^2 y^4 + a^4 y^2 + a^6 = 0.$$

Eine Lösung dieser Gleichung ist, wie man sich leicht überzeugt,

$$y_1^2 = \frac{a^2}{3}.$$

Hiernach findet man auch leicht die beiden anderen Wurzeln, nämlich

$$y_2^2 = a^2(2 + \sqrt{5}); \quad y_3^2 = a^2(2 - \sqrt{5}).$$

Die letzte Wurzel führt zu imaginären Werthen von y, kommt also nicht weiter in Betracht. Aber auch die zweite führt nicht zu reellen Punkten, denn wenn man $y = y_2$ setzt und aus der ersten der Gl. (243) das zugehörige z_2^2 berechnet, erhält man

$$z_2^2 = a^2(2 - \sqrt{5})$$

also imaginäre Werthe für z. Es bleiben daher nur die Punkte mit den Coordinaten

$$y = \pm a \sqrt{\frac{1}{3}}, \qquad z = \pm a \sqrt{\frac{1}{3}}$$

übrig. Setzt man diese Werthe in die Gleichung für τ^2 ein, so erhält man

$$\tau^2_{\max} = \frac{3}{32} \frac{M^2}{a^6}$$

oder

$$\tau_{\max} = 0{,}306 \frac{M}{a^3}.$$

Mit der Ermittelung des analytischen Maximums ist aber die Frage noch nicht beantwortet, wo der absolut grösste Werth von τ auftritt; dieser kann auch, ohne ein analytisches Maximum zu sein, am Umfange vorkommen. Nach dem, was wir über die Spannungsvertheilung längs des Umfanges gefunden haben, brauchen wir nur noch in den Mitten der Rechteckseiten nach dem grössten Werthe von τ zu suchen. Mit $y = a$ und $z = 0$ wird

$$\tau = \frac{9 M}{16 a^2 b}. \tag{244}$$

Setzen wir auch jetzt wieder $b = a$, so liefert dies

$$\tau = 0{,}5625 \frac{M}{a^3},$$

also in der That erheblich mehr als an der Stelle des analytischen Maximums, das auf der Diagonale vorkommt. Diese Erfahrung berechtigt uns, zunächst wenigstens für Wellen, deren Querschnitt nicht zu sehr von einem Quadrate abweicht, nur auf die grösste am Umfange auftretende Spannung zu achten. Aber auch für andere Verhältnisse der Rechteckseiten zu einander würde eine nach dem Muster der vorausgehenden durchgeführte Betrachtung voraussichtlich zu dem gleichen Ergebnisse führen. Den Werth von τ in der Mitte der anderen Rechteckseite erhalten wir aus Gl. (244), wenn wir darin a mit b vertauschen. Wir erkennen daraus, dass τ am grössten in der Mitte der grösseren Rechteckseite, also am grössten an jener Stelle des Umfangs wird, die dem Mittelpunkte des Rechtecks am nächsten liegt. Bei der Anwendung von Gl. (244) zur Berechnung der Festig-