Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

Annahme über das Spannungsvertheilungsgesetz.

urn:nbn:de:hbz:466:1-84594

τ_{xy} eine gerade Function von y und eine ungerade Function von z ist, während umgekehrt τ_{xz} eine ungerade Function von y und eine gerade von z sein muss.

Ein lineares Gesetz für die Vertheilung der Spannungscomponenten über den Querschnitt ist hier nicht möglich, da z. B. τ_{xy} sowohl für $x = a$ als im Coordinatenursprunge verschwinden muss. Wir wollen aber, indem wir diesen Grenzbedingungen am Umfange vollständig Rechnung tragen, das damit noch verträgliche, sonst aber möglichst einfach gestaltete Spannungsvertheilungsgesetz zu Grunde legen. Vor allem wollen wir also annehmen, dass die Spannungscomponenten hinreichend genau durch algebraische Functionen der Querschnitts-Coordinaten y und z dargestellt werden können und wir wollen ferner den Grad dieser Functionen so niedrig annehmen, als es möglich ist, ohne die Grenzbedingungen zu verletzen. Dazu reicht eine Function dritten Grades aus. Mit Rücksicht darauf, dass τ_{xy} gerade in Beziehung auf y und ungerade in Beziehung auf z sein soll, setzen wir daher zunächst

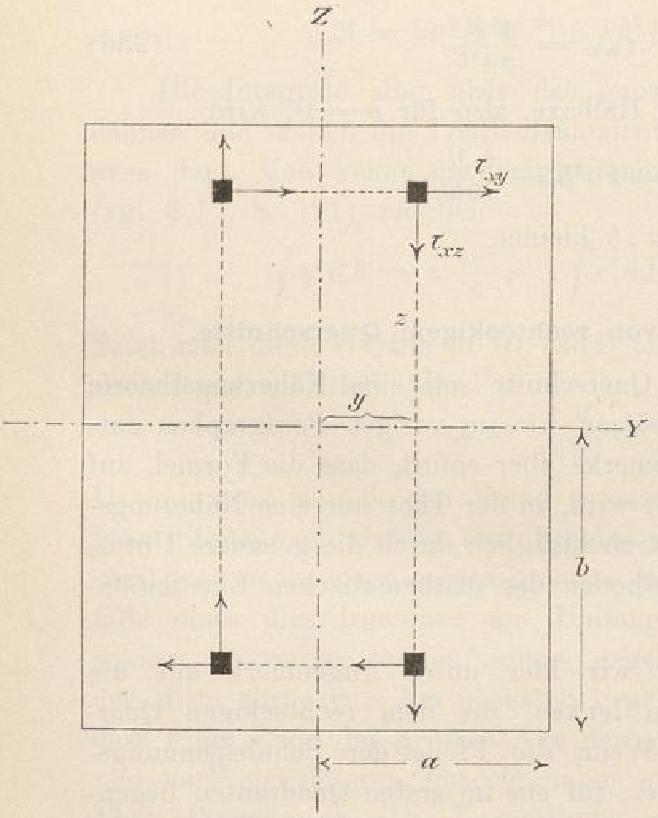

Abb. 61.

$$\tau_{xy} = c_1 z + c_2 z y^2 + c_3 z^3.$$

Nun muss an den zur Z-Axe parallelen Querschnittsseiten, also für $y = \pm a$ dieser Ausdruck identisch, d. h. für jedes z, verschwinden. Dies liefert die Bedingungsgleichung

$$0 = c_1 z + c_2 a^2 z + c_3 z^3,$$

aus der, weil sie identisch erfüllt sein muss,

$$c_3 = 0; \quad c_2 = -\frac{c_1}{a^2}$$

folgt. Damit ist τ_{xz} bis auf eine Constante bestimmt, nämlich

$$\tau_{xy} = c_1 z - \frac{c_1}{a^2} z y^2. \tag{237}$$

Aehnlich verfahren wir mit τ_{xz}; wir setzen zunächst

$$\tau_{xz} = k_1 y + k_2 y z^2 + k_3 y^3.$$

Für $z = \pm b$ muss dies verschwinden, also

$$0 = k_1 y + k_2 y b^2 + k_3 y^3$$

und hieraus

$$k_3 = 0; \quad k_2 = -\frac{k_1}{b^2}.$$

Setzt man dies ein, so erhalten wir den mit den aufgestellten Bedingungen verträglichen, möglichst einfachen Ausdruck für τ_{xz}

$$\tau_{xz} = k_1 y - \frac{k_1}{b^2} y z^2. \tag{238}$$

Zwischen den Constanten c_1 und k_1 in (237) und (238) muss aber ausserdem noch eine Bedingungsgleichung erfüllt sein, um das Gleichgewicht zwischen den Spannungen an irgend einem Volumenelemente zu sichern. Die erste der Gleichungen (5), durch die die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen der Statik ausgedrückt wurden, lautete

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0.$$

Hier ist sowohl X als σ_x gleich Null zu setzen, denn zum Auftreten einer Normalspannung im Querschnitte der Welle ist kein Anlass gegeben, wenn neben der Torsion der Welle nicht eine Biegung oder eine axiale Belastung nebenher läuft. Von einer solchen zusammengesetzten Beanspruchung der Welle sollte aber hier nicht die Rede sein. Beachtet man noch, dass

$\tau_{yx} = \tau_{xy}$ und $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ zu setzen ist, so vereinfacht sich jene Gleichgewichtsbedingung hier zu

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = -\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}.$$

Nach Eintragen der Werthe aus den Gl. (237) und (238) geht sie über in

$$-2yz\frac{c_1}{a^2} = 2yz\frac{k_1}{b^2}.$$

Sie wird also in der That identisch erfüllt, falls man

$$k_1 = -\frac{c_1 b^2}{a^2} \tag{239}$$

setzt und dies zeigt uns zugleich, dass das in dieser Weise näher bestimmte System der Spannungen vom Gesichtspunkte der Statik starrer Körper aus möglich ist. Eine andere Frage wäre es natürlich, ob dieses Spannungssystem zugleich mit den elastischen Eigenschaften eines bestimmten Materials, z. B. mit dem Hooke'schen Gesetze in Uebereinstimmung stehe. Auf eine solche Untersuchung haben wir aber hier, in der Absicht zu einem möglichst einfachen, wenn auch nur näherungsweise richtigen Resultate zu gelangen, von vornherein verzichtet. Mit Rücksicht auf Gl. (239) geht jetzt Gl. (238) über in

$$\tau_{xz} = -\frac{c_1 b^2}{a^2}y + \frac{c_1}{a^2}yz^2. \tag{240}$$

Es bleibt jetzt nur noch die Bestimmung der einzigen, bisher unbekannt gebliebenen Constanten c_1 übrig und man sieht leicht ein, dass diese aus der Momentengleichung, ganz wie früher bei dem elliptischen Querschnitte, berechnet werden kann. Die Momentengleichung lautet

$$M = \int dF(\tau_{xy} \cdot z - \tau_{xz} \cdot y)$$

oder nach Einsetzen der Werthe aus (237) und (240)

$$M = c_1\int\left(z^2 - 2\frac{z^2y^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2}y^2\right)dF.$$

Die rechte Seite zerfällt in drei Glieder, von denen das erste und das letzte ohne Weiteres angegeben werden können, da