Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

§. 52. Wellen von kreisförmigem Querschnitte.

Neunter Abschnitt.

Die Verdrehungsfestigkeit.

§ 52. Wellen von kreisförmigem Querschnitte.

Ein Stab, der auf Verdrehen beansprucht wird, heisst im Maschinenbau eine Welle. Wenn der Querschnitt ein Kreis ist, muss man von vornherein erwarten, dass alle Punkte, die vorher auf einer Querschnittsebene enthalten waren, nach der Formänderung auch noch in einer zur Axe senkrechten Ebene liegen. Der Symmetrie wegen könnte nämlich der Querschnitt jedenfalls nur in eine Umdrehungsfläche übergehen. Es ist aber nicht wohl einzusehen, weshalb diese Umdrehungsfläche ihre Hohlseite eher nach der einen, als nach der entgegengesetzten Seite kehren sollte, oder mit anderen Worten, weshalb die Fläche nach vorn hohl sein sollte, wenn man den Stab in einem bestimmten Sinne verdreht. Unserem Symmetriegefühle nach müssen wir erwarten, dass die Umkehrung des Drehsinns keinen Einfluss auf die Gestalt der Fläche haben kann, in die der Querschnitt übergeht.

Freilich darf man sich auf Symmetriebetrachtungen dieser Art nicht zu sehr verlassen. Dass ein gradliniger elektrischer Strom eine parallele Magnetnadel in einem bestimmten Sinne dreht, verstösst zunächst auch gegen unser Symmetriegefühl und bleibt darum doch Thatssache. Jedenfalls ist aber eine Betrachtung solcher Art ausreichend, um eine Vermuthung darauf zu gründen; ich füge noch hinzu, dass sich diese Vermuthung sowohl durch weitere theoretische Betrachtungen, die ich in einem späteren Abschnitte darlegen werde, als auch, wie es scheint, durch die Erfahrung selbst, bestätigt hat. Freilich ist die Zahl der Verdrehungsversuche, die man etwa als beweiskräftig hierfür heranziehen könnte, sehr gering. Uebrigens nahm man früher bei der Torsion ganz ebenso allgemein, wie bei der Biegung an, dass die Querschnitte auch bei beliebiger Gestalt nach der Formänderung eben blieben. Diese Annahme hat sich indessen als vollständig unrichtig herausgestellt. Querschnitte, die nicht kreisförmig sind, bleiben vielmehr sicher nicht eben bei der Verdrehung. Erfahrung und Theorie lehren dies übereinstimmend.

Bei der Verdrehung einer Welle von kreisförmigem Querschnitte geht jede zur Axe parallel gezogene Grade in ein Stück einer Schraubenlinie über. Zwei Halbmesser, die in zwei um die Länge l voneinander entfernten Querschnitten parallel zueinander gezogen waren, bilden nach der Verdrehung einen Winkel miteinander, den man den Verdrehungswinkel heisst, und den wir mit $\Delta\varphi$ bezeichnen.

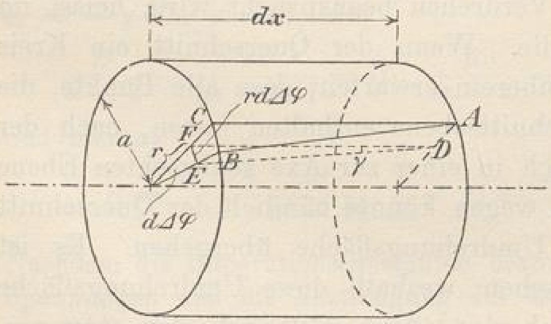

Abb. 59′.

In Abb. 59′ ist ein Wellenelement von der Länge dx gezeichnet. AB ist das Element der Schraubenlinie, das ursprünglich mit der Cylindererzeugenden zusammenfiel. Der Verdrehungswinkel für die Länge dx sei $d\Delta\varphi$, dann ist

$$d\Delta\varphi = \Delta\varphi \frac{dx}{l}.$$

Die Schraubenlinie AB bildet jetzt irgend einen spitzen Winkel mit der Querschnittsebene, während die durch dieselben Theilchen vor der Formänderung gezogenen Linie AC rechtwinklig zum Querschnitte stand. Einer solchen Winkeländerung entspricht eine Schubspannung τ im Querschnitte, die nach dem Elasticitätsgesetze daraus berechnet werden kann.

Wir finden die relative Verschiebung von zwei im Abstande r von der Axe in benachbarten Querschnitten ursprünglich einander gegenüberliegenden Punkten D und F, wenn wir den Winkel, um den sich die Querschnitte gegeneinander drehen, mit dem Halbmesser r multipliciren, also gleich

$$r d \Delta\varphi \quad \text{oder} \quad r\Delta\varphi \frac{dx}{l}.$$

Um so viel ist der eine Endpunkt der Strecke dx, die die correspondirenden Punkte beider Querschnitte verbindet, gegen den anderen und zwar in der Richtung senkrecht zum Radius r verschoben worden. Der ursprünglich rechte Winkel zwischen dx und der Querschnittsfläche hat sich dabei um einen Betrag γ geändert und zwar so, dass γdx ebenfalls ein Ausdruck für die relative Verschiebung ist. Ein Vergleich beider Ausdrücke liefert

$$\gamma = \frac{r\Delta\varphi}{l}.$$

Nach dem Elasticitätsgesetze folgt aber die Schubspannung aus γ durch Multiplication mit dem Schubelasticitätsmodul, also

$$\tau = G\gamma = \frac{G r \Delta\varphi}{l}. \tag{227}$$

Dass τ senkrecht zum Radius gerichtet ist, folgt daraus, dass auch die elastische Verschiebung in diesem Sinne erfolgte.

Aus Gl. (227) erkennen wir, dass die Schubspannungen τ nach einem Gradliniengesetze über den Querschnitt vertheilt sind, nämlich proportional mit den Abständen r von der Mitte zunehmen. In der Mitte wird τ zu Null und die grösste Beanspruchung des Materials findet am Umfange statt. Bezeichnen wir die Spannung am Rande mit τ' und den Halbmesser des Querschnitts mit a, so ist nach Gl. (227)

$$\tau = \frac{\tau' r}{a} \tag{228}$$

und zur Berechnung von τ' steht uns eine Momentengleichung zur Verfügung. Alle Schubspannungen, die sich über den Querschnitt vertheilen, lassen sich zu einem Kräftepaare zusammensetzen, dessen statisches Moment gleich dem von den äusseren Kräften herrührenden Verdrehungsmomente sein muss. Bezeichnen wir das Torsionsmoment mit M, so ist

$$M = \int \tau d F r = \frac{\tau'}{a} \int r^2 d F = \frac{\tau'}{a} \Theta_p.$$

Hier ist mit Θ_p das polare Trägheitsmoment des kreisförmigen Querschnitts bezeichnet, also $\Theta_p = \frac{\pi a^4}{2}$. Durch Auflösen nach τ' erhält man

$$\tau' = \frac{M}{\Theta_p} \cdot a \tag{229}$$

oder auch nach Einsetzen des Werthes von Θ_p

$$\tau' = \frac{2M}{\pi a^3}. \tag{230}$$

Man gibt häufig der Form (229) den Vorzug, weil sie sich genau an die Formel für die Biegung anschliesst. Früher freilich, als man noch glaubte, dass auch die Querschnitte von anderer Gestalt bei der Verdrehung eben blieben, bezog man die ganze Entwickelung, die hier nur für kreisförmige Querschnitte abgeleitet ist, sofort auch auf jene und Gl. (229) galt als die allgemeine Formel für die Berechnung der Torsionsspannungen. Da man jetzt weiss, dass Gl. (229) nur für den kreisförmigen Querschnitt gültig ist, hat es keinen Zweck, Θ_p in dieser allgemeinen Form stehen zu lassen, sondern man thut besser, sofort den Werth dafür einzusetzen, also Gl. (230) zu benutzen.

Für den Verdrehungswinkel $\Delta\varphi$ erhält man nach Gl. (227)

$$\Delta\varphi = \frac{\tau l}{G r} = \frac{\tau' l}{G a} = \frac{2 M l}{\pi a^4 G}. \tag{231}$$

Die einzige weitere Ausdehnung, die diese Formeln zulassen, ist die auf Wellen von kreisringförmigem Querschnitte. Wenn die beiden Querschnittshalbmesser der hohlen Welle mit a und b bezeichnet werden $(a > b)$, erhält man

$$\tau' = \frac{2 M a}{\pi (a^4 - b^4)}; \quad \Delta\varphi = \frac{2 M l}{\pi (a^4 - b^4) G}.$$