Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

Aufgaben 37 - 41.

wie ein aus zwei Stücken zusammengesetztes. Es ist aber klar, dass man solche bleibende Formänderungen vermeiden möchte, da sie ein genaues Passen des Kolbens bezw. des Geschosses auf die Dauer unmöglich machen.

Aufgaben.

37. *Aufgabe.* *Eine biegsame Membran verschliesst eine kreisförmige Oeffnung und ist einem Ueberdrucke von der einen Seite her ausgesetzt. Man soll die entstehende Ausbauchung und die Spannung berechnen.*

Lösung. Die Mittelebene geht in eine Kugelhaube über, deren Pfeil f als klein gegenüber dem Halbmesser r der Oeffnung angesehen werden kann (vgl. Abb. 58'). Wenn man den Radius der Kugelhaube mit R bezeichnet, hat man nach dem Pythagoräischen Satze

$$R^2 = r^2 + (R - f)^2,$$

woraus genau genug

$$f = \frac{r^2}{2R}$$

folgt. Der Winkel, den der äusserste Radius der Kugelhaube mit der Symmetrieaxe bildet, sei mit φ bezeichnet, dann ist auch, da φ klein ist,

$$r = R \sin\varphi = R\varphi$$

und daher

$$f = \frac{r}{2}\varphi.$$

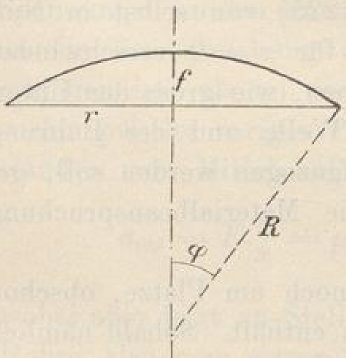

Abb. 58'.

Der zu φ und zum Radius R gehörige Bogen ist gleich $R\varphi$; ursprünglich war diese Länge gleich r, also gleich $R \sin\varphi$. Hier dürfen wir nicht $\sin\varphi$ mit φ vertauschen, weil es gerade darauf ankommt, die kleine Dehnung, die die Membran bei der Formänderung erfährt, zu berechnen. Bezeichnen wir die specifische Dehnung mit ε, so wird

$$\varepsilon = \frac{R\varphi - R\sin\varphi}{R\varphi} = \frac{\varphi - \sin\varphi}{\varphi} = \frac{\varphi^2}{6}.$$

Den letzten Werth erhält man durch Entwickelung der Sinusreihe, von der es genügt, die beiden ersten Glieder beizubehalten

Aus der Dehnung folgt die Spannung σ der Membran in der Richtung des Meridians. Es genügt, wenn wir setzen

$$\sigma = E\varepsilon = \frac{E\varphi^2}{6}.$$

Andererseits müssen aber die Spannungen im Gleichgewichte mit den Druckkräften stehen, denen die Membran ausgesetzt ist. Dazu können wir uns der Gl. (199) bedienen, da es hierfür keinen Unterschied macht, ob die Kugelhaube zu einer ganzen Kugel gehört oder ob sie in anderer Weise gestützt ist. Wir haben also auch

$$\sigma = \frac{pR}{2h}$$

und die Gleichsetzung beider Ausdrücke liefert, wenn wir vorher noch beiderseits mit φ multipliciren,

$$\frac{pr}{2h} = \frac{E\varphi^3}{6},$$

woraus

$$\varphi = \sqrt[3]{\frac{3pr}{Eh}}$$

folgt. Man braucht diesen Werth nur in die vorher schon aufgestellten Formeln für f und σ einzusetzen, um die Aufgabe zu lösen, also

$$f = \frac{r}{2}\sqrt[3]{\frac{3pr}{Eh}}; \quad \sigma = \sqrt[3]{\frac{p^2E}{24}\cdot\frac{r^2}{h^2}}.$$

Die Lösung ist freilich nicht streng richtig, weil σ nicht nur von der Dehnung ε in der Richtung des Meridians, sondern auch von der in der Richtung des Parallelkreises abhängt, über die sich nur aussagen lässt, dass sie am Umfange gleich Null ist. Ebenso ist auch nicht sicher, ob die Dehnung ε in der That über die ganze Fläche hin gleich gross ist, wie es bei der Berechnung angenommen wurde. Für die praktische Anwendung sind die Formeln aber jedenfalls genau genug.

38. Aufgabe. Ein dünnwandiges Gefäss hat die Gestalt eines Rotationsellipsoides und ist einem inneren Ueberdrucke ausgesetzt; man soll den Spannungszustand der Gefässwand untersuchen.

Anmerkung. Ein Ellipsoid und überhaupt jedes Gefäss von überall endlicher Krümmung (bei dem also an keiner Stelle einer der Hauptkrümmungsradien unendlich gross wird) kann einem inneren oder äusseren Ueberdrucke widerstehen, wenn die Wand auch so dünn ist, dass sie keinen merklichen Widerstand gegen Biegung leisten kann, während ein Cylinder dazu im Allgemeinen nicht im Stande ist.

Lösung. Schnitte durch die Rotationsaxe bezeichne ich als Meridiane, solche senkrecht dazu als Parallelkreise. Ich lege zunächst einen Parallelkreisschnitt und betrachte das Gleichgewicht der dadurch abgegrenzten Haube. Der Symmetrie wegen sind die Spannungen σ_t (wie ich sie nennen will) dem ganzen Umfange nach gleichförmig vertheilt. Bezeichnet man den Winkel, den die Tangente an den Meridianschnitt bei dem betreffenden Parallelkreise mit der Rotationsaxe bildet, mit φ, so ist

$$\sigma_t \cdot 2\pi x h \cdot \cos\varphi = \pi x^2 p$$

die Gleichgewichtsbedingung, aus der sich σ_t zu

$$\sigma_t = \frac{px}{2h\cos\varphi}$$

berechnet, wenn x den Halbmesser des Parallelkreises bedeutet.

Soweit gleicht also das Verfahren vollständig dem bei der Berechnung des Kugelkessels angewendeten. Um aber auch die Ringspannungen σ_r zu finden, die in einem Meridianschnitte übertragen werden, genügt es nicht, das Gleichgewicht der einen Hälfte des Gefässes in's Auge zu fassen, weil man nicht wissen kann, wie sich die Ringspannungen über den Umfang des Meridianschnittes vertheilen. Man grenze daher aus der Kesselwand ein Element ab, das zwischen zwei Meridianschnitten, die den Winkel $d\alpha$ miteinander bilden, und zwischen zwei Parallelkreisschnitten, im Abstande dy voneinander, liegt. An den vier Umfangsseiten des Elements wirken die Spannungen σ^r und σ_t und dazu kommt der Flüssigkeitsdruck auf die Fläche des Elements. Die fünf Kräfte müssen im Gleichgewichte miteinander stehen; wir brauchen dabei nur auf die Gleichgewichtsbedingung gegen Verschieben in der Richtung des Parallelkreisradius zu achten, denn die Gleichgewichtsbedingung gegen Verschieben parallel zur Rotationsaxe ist zur Berechnung von σ_t schon verwendet worden.

Das zwischen beiden Parallelkreisen liegende Element des Meridians (also das Bogenelement der Ellipse) sei mit ds bezeichnet. Die Spannungen σ_r an beiden Meridianschnittflächen geben zusammen die Componente

$$\sigma_r h ds \cdot d\alpha$$

mit dem Pfeile auf den Mittelpunkt zu gerichtet. Die Spannung σ_t im oberen Parallelkreisschnitte (vom Radius x) hat die Grösse $\sigma_t h x d\alpha$ und die Componente ist gleich $\sigma_t h x d\alpha \sin\varphi$; der Pfeil ist nach dem Mittelpunkte gekehrt. Entgegengesetzt gerichtet ist aber die Componente am zweiten Parallelkreisschnitte. Der Unterschied zwischen beiden Componenten ist das Differential des vorhergehenden Ausdrucks, also

$$\frac{d}{dx}(\sigma_t x \sin\varphi) h \, d\alpha \, dx$$

und bedeutet eine nach auswärts gekehrte Kraft. Der Flüssigkeitsdruck auf die Fläche endlich hat die Componente

$$p\, ds\, x\, d\alpha \cos\varphi \quad \text{oder} \quad -p x\, dy\, d\alpha,$$

die nach aussen hin gewendet ist. Die Gleichgewichtsbedingung lautet demnach, wenn man mit $d\alpha \cdot dx$ dividirt und vorher den Werth von σ_t einsetzt,

$$\frac{p}{2}\frac{d}{dx}(x^2 \operatorname{tg}\varphi) - \sigma_r h \frac{ds}{dx} - px\frac{dy}{dx} = 0.$$

In dieser Gleichung ist σ_r die einzige Unbekannte; für $\operatorname{tg}\varphi$ kann man $-\frac{dx}{dy}$ setzen und die Differentialquotienten lassen sich mit Hülfe der Ellipsengleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ausdrücken. Wenn man dies gethan hat und die Werthe in die vorhergehende Gleichung einsetzt, erhält man daraus sofort σ_r als Function von x.

39. *Aufgabe. Die Berechnung der Spannungen eines dünnwandigen ringförmigen Gefässes von kreisförmigem Querschnitte, das unter einem inneren Ueberdrucke steht, soll in allgemeinen Umrissen angegeben werden.*

Lösung. Ein Schnitt mm (Abb. 59, S. 338) senkrecht zur Rotationsaxe trifft die Gefässwand nach zwei Kreisen. Wenn man nun aber auch aus Symmetriegründen schliessen kann, dass die Spannungen σ_t längs des Umfangs jedes dieser Kreise gleichförmig vertheilt sind, so sind sie doch sicher im inneren Kreise verschieden von denen längs des äusseren Kreises und man kommt daher mit der Betrachtung des Gleichgewichtes des oben abgeschnittenen Theils, die zur Lösung der vorigen Aufgabe führte, nicht aus. Deshalb denken wir uns den oberen Theil noch durch einen Ringschnitt nn in zwei Hälften getheilt. Innerhalb dieses Ringschnitts treten nur horizontal gerichtete Kräfte auf; wir können daher eine Gleichgewichtsbedingung für Verschieben jeder Hälfte in vertikaler Richtung aufstellen, in der das zugehörige σ_t als einzige Unbekannte auftritt. So hat man für den nach aussen hin liegenden Theil unter Benutzung der in die Abbildung eingeschriebenen Bezeichnungen

$$\sigma_t 2\pi(x + a) h \cos\varphi = p\pi\left((a + x)^2 - a^2\right),$$

woraus mit Berücksichtigung der Beziehung $\cos\varphi = \frac{x}{r}$

$$\sigma_t = p\frac{r}{h}\cdot\frac{2a+x}{2a+2x}$$

folgt. Nachdem die Spannungen σ_t bekannt sind, können die Ringspannungen genau auf dieselbe Art wie bei der Lösung der vorigen Aufgabe ermittelt werden.

40. *Aufgabe. Wie stark muss die Wand eines Flammrohres von 80 cm Durchmesser gewählt werden, wenn der äussere Ueber-*

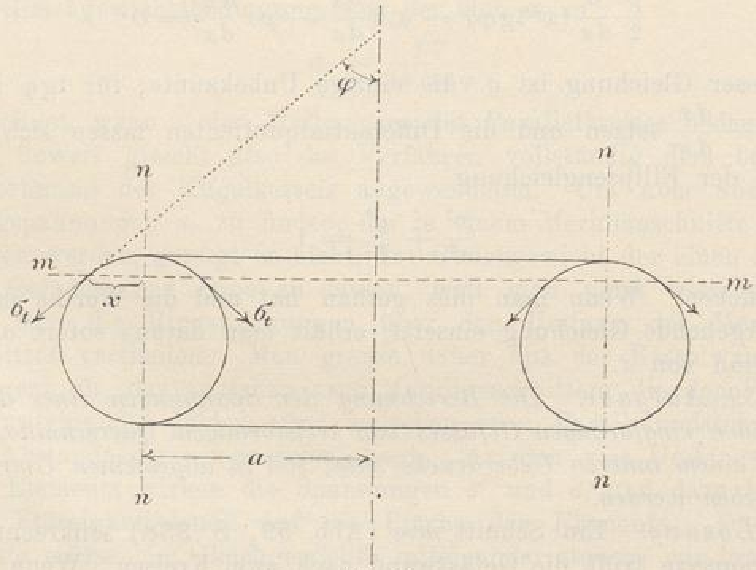

Abb. 59.

druck 10 atm beträgt und fünffache Sicherheit gegen Ausknicken verlangt wird?

Lösung. Der kritische Ueberdruck ist nach Gl. (210)

$$p_k = \frac{E}{3}\left(\frac{h}{r}\right)^3.$$

Wir setzen in diese Gleichung, der verlangten fünffachen Sicherheit wegen, $p_k = 50$ atm, $r = 40$ cm und $E = 2\cdot 10^6$ (für Schweisseisen) ein und lösen sie nach h auf; wir erhalten

$$h = r\sqrt[3]{\frac{3p_k}{E}} = 40\sqrt[3]{\frac{150}{2\cdot 10^6}} = 1{,}69 \text{ cm}.$$

Bei Anwendung von Versteifungsringen kann h schwächer gewählt werden; es muss nur dafür gesorgt werden, dass die Ringe nicht zu weit auseinander sitzen und dass das Trägheitsmoment des Versteifungsrings das Trägheitsmoment des Blechs von der berechneten Stärke h auf eine Länge, die gleich dem Abstande der Versteifungsringe voneinander ist, mindestens ersetzt.

41. Aufgabe. Man soll die in § 50 für die dickwandigen Röhren gegebene Rechnung auf den Fall eines kugelförmigen Gefässes von grösserer Wandstärke übertragen.

Lösung. Abb. 57 bedeute jetzt den Querschnitt durch die Kugel; in diesem Sinne verwenden wir alle dort eingeschriebenen Bezeichnungen. Die Gl. (210) und (211) für die specifischen Dehnungen bleiben bestehen. Das Element, an dem das Gleichgewicht der Kräfte betrachtet wird, gehöre zu einem Kreiskegel mit dem Winkel $d\alpha$ an der Spitze. Die Componente der σ_t in der Richtung des Radius ist dann

$$\frac{1}{2}\sigma_t \pi x\, dx\, d\alpha^2.$$

Die Spannungen σ_r an der zum Radius x gehörigen Basisfläche betragen zusammen $\sigma_r \frac{\pi}{4}(x\,d\alpha)^2$ und das Differential davon ist

$$\frac{\pi}{4}\frac{d}{dx}(x^2\sigma_r)\,dx\,d\alpha^2.$$

An Stelle von Gl. (213) erhalten wir daher

$$\sigma_t \cdot x = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(x^2\sigma_r).$$

Die beiden Unbekannten σ_r und σ_t sind jetzt in u auszudrücken. Dabei ist zu beachten, dass hier

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E}\left(\frac{m-1}{m}\sigma_t - \frac{1}{m}\sigma_r\right); \quad \varepsilon_r = \frac{1}{E}\left(\sigma_r - \frac{2}{m}\sigma_t\right)$$

ist, weil die Spannungen σ_t hier von allen Seiten her wirken (d. h. zwei der drei Hauptspannungen sind gleich σ_t). Die Auflösung liefert

$$\sigma_t = \frac{mE}{m^2-m-2}(m\varepsilon_t + \varepsilon_r); \quad \sigma_r = \frac{mE}{m^2-m-2}\left((m-1)\varepsilon_r + 2\varepsilon_t\right)$$

oder mit Rücksicht auf die Gl. (211) und (212)

$$\sigma_t = \frac{mE}{m^2-m-2}\left(m\frac{u}{x} + \frac{du}{dx}\right); \quad \sigma_r = \frac{mE}{m^2-m-2}\left((m-1)\frac{du}{dx} + \frac{2u}{x}\right).$$

Die Differentialgleichung geht nach Einführen dieser Werthe über in

$$2x\left(m\frac{u}{x} + \frac{du}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left((m-1)x^2\frac{du}{dx} + 2ux\right)$$

oder nach Ausführung der Differentiation, Wegheben der Glieder, die gegeneinander fortfallen und Division mit $(m - 1)$

$$x^2 \frac{d^2 u}{d x^2} + 2x \frac{du}{dx} - 2u = 0.$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$u = Bx + \frac{C}{x^2}.$$

Damit folgt für σ_r

$$\sigma_r = \frac{mE}{m^2 - m - 2}\left((m+1)B - (m-2)\frac{2C}{x^3}\right)$$

$$= \frac{mE}{m-2} B - \frac{2mE}{m+1} \frac{C}{x^3}.$$

Wenn der Ueberdruck von innen her wirkt (im entgegengesetzten Falle wäre ganz ähnlich zu verfahren) ist $\sigma_r = 0$ für $x = b$ und $\sigma_r = -p$ für $x = a$, also

$$\frac{B}{m-2} - \frac{2C}{(m+1)b^3} = 0; \quad \frac{B}{m-2} - \frac{2C}{(m+1)a^3} = -\frac{p}{mE}$$

und hieraus

$$B = \frac{m-2}{m} \frac{a^3}{b^3 - a^3} \cdot \frac{p}{E}; \quad C = \frac{m+1}{2m} \cdot \frac{a^3 b^3}{b^3 - a^3} \frac{p}{E}.$$

Nachdem die Integrationsconstanten bestimmt sind, findet man alle Spannungen und die Anstrengung des Materials genau so wie bei den dickwandigen Röhren in § 50.