Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

§. 50. Dickwandige Röhren.

urn:nbn:de:hbz:466:1-84594

geordnete Punkte, während der ganze Gang der Untersuchung ohne jede wesentliche Aenderung von dort übernommen wurde.

§ 50. Dickwandige Röhren.

Der Einfachheit wegen betrachte ich nur den Fall, dass das Rohr einem inneren Ueberdrucke ausgesetzt ist; für äusseren Ueberdruck gelten die Betrachtungen ebenfalls, wenn man nur überall die Vorzeichen der Dehnungen und Spannungen umkehrt.

Aus Symmetriegründen folgt, dass von den drei Hauptaxen des Spannungszustandes für jede Stelle der Rohrwand eine parallel zur Rohraxe geht, eine zweite in die Richtung des Radius und eine dritte in die Richtung der Tangente an den Kreis fällt, der durch den gegebenen Punkt von der Rohraxe aus gelegt werden kann. Um die Spannungen und Dehnungen in der Richtung der Rohraxe will ich mich jetzt nicht kümmern; man kann sie nachträglich ermitteln und in Berücksichtigung ziehen. Wichtiger sind die beiden anderen Hauptspannungen und namentlich die in der Richtung der Tangente σ_t, denn man weiss schon aus den vorausgehenden Untersuchungen, dass die Bruchgefahr in erster Linie von ihr abhängt.

Um dieser Behandlung der Aufgabe den geeigneten Ausdruck zu geben, setze ich jetzt voraus, dass das Rohr an den Enden nicht geschlossen sei und sich in der Richtung der Rohraxe beliebig ausdehnen und zusammenziehen könne, während zugleich auf die Innenwand der specifische Druck p ausgeübt wird. Um das Mitschleppen eines überflüssigen Faktors zu vermeiden, betrachte ich wieder ein Stück des Rohrs von der Länge $= 1$.

Unter dem Einflusse des inneren Druckes erweitert sich das Rohr und die elastische Vergrösserung, die ein Radius x erfährt, der nach irgend einem Theilchen der Rohrwand gezogen ist, sei mit u bezeichnet. Wenn u als Function von x bekannt wäre, könnte man daraus die Dehnungen ε_t und ε_r in der Richtung der Tangente und des Radius und hiermit auch die zugehörigen Spannungen σ_t und σ_r berechnen; die Aufgabe wäre also gelöst. Es wird sich also vor allen Dingen darum handeln, diese Function u zu bestimmen.

In Abb. 57 ist ein Querschnitt des Rohrs gezeichnet und durch zwei Radien, die den Centriwinkel $d\alpha$ miteinander bilden, sowie durch zwei Kreisbögen mit den Halbmessern x und $x + dx$ ist ein Flächenelement abgegrenzt. Diesem Flächenelemente entspricht ein Volumenelement des Rohrs, für das wir die Bedingung für das Gleichgewicht der daran angreifenden Spannungen anschreiben wollen; dies wird uns zur Lösung der Aufgabe führen. In Abb. 58 (s. S. 324) ist das Volumenelement noch besonders herausgezeichnet mit der Angabe der daran angreifenden Spannungen.

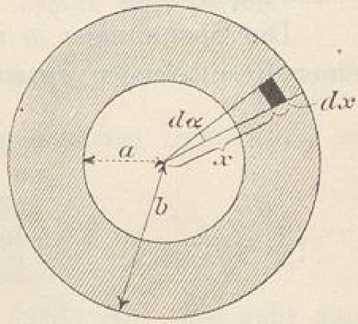

Abb. 57.

Zunächst bemerke ich, dass die specifische Dehnung in der Richtung der Tangente

$$\varepsilon_t = \frac{u}{x} \tag{211}$$

gesetzt werden kann, denn die Länge eines Kreisumfangs wächst proportional mit dem Radius. Für die specifische Dehnung in der Richtung des Radius erhält man dagegen

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dx}, \tag{212}$$

denn aus dx wird nach der Formänderung $dx + du$. Man sieht sofort ein, dass in Wirklichkeit in der Richtung des Radius eine Verkürzung eintreten, dass also du und hiermit ε_r negativ werden muss. Ich lasse indessen die Gleichung in der angeschriebenen Form stehen. Die weitere Untersuchung muss dann von selbst zu einem negativen Werthe von ε_r führen. Damit hängt es auch zusammen, dass ich σ_r in Abb. 58 mit einem Pfeile eingezeichnet habe, der eine Zugspannung bedeutet. Wenn nicht ausdrücklich etwas anderes verabredet wird, haben wir die vorkommenden Spannungen zunächst immer als Zugspannungen und die specifischen Längenänderungen als

Dehnungen zu betrachten und als solche positiv in die Rechnung einzuführen. Das Ergebniss der Rechnung gibt dann durch das schliesslich herauskommende Vorzeichen zu erkennen, welche der vorkommenden Spannungen in Wirklichkeit Druckspannungen sind.

Die Spannungen σ_t in Abb. (58) fassen wir zunächst zu einer Resultirenden zusammen. Auf jeder der beiden Seitenflächen haben wir $dx \cdot \sigma_t$ und wenn wir diese beiden Kräfte mit Hülfe eines Kraftdreiecks zu einer Resultirenden vereinigen, erhält diese die Grösse

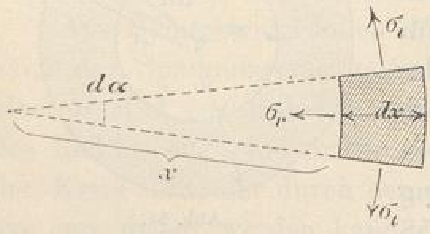

Abb. 58.

$$dx\, \sigma_t\, d\alpha.$$

Nun betrachten wir die Spannungen σ_r. Auf der inneren Fläche haben sie die Grösse

$$\sigma_r x\, d\alpha,$$

denn der zum Radius x und zum Centriwinkel $d\alpha$ gehörende Bogen ist gleich $x d\alpha$. Gegenüber liegt die Spannung $\sigma_r + d\sigma_r$, die sich über die Fläche $(x + dx)\, d\alpha$ erstreckt. Beide Kräfte gehen in entgegengesetzter Richtung; es kommt also nur auf ihren Unterschied an, der auch unmittelbar als Differential des vorausgehenden Ausdrucks, also in der Form

$$\frac{d}{dx}(\sigma_r x)\, dx\, d\alpha$$

angeschrieben werden kann. Wenn σ_r und der Differentialquotient positiv sind, bedeutet dies eine Resultirende, deren Pfeil nach aussen hin geht. Die Resultirende der σ_t geht dagegen bei positivem Werthe von σ_t nach innen. Das Gleichgewicht gegen Verschieben in der Richtung des Radius erfordert daher, dass

$$\sigma_t = \frac{d}{dx}(\sigma_r x) \tag{213}$$

ist. Um diese Gleichung zur Ermittelung von u verwenden zu können, müssen wir zunächst die Spannungen in den specifischen Dehnungen ausdrücken. Nach dem Elasticitätsgesetze ist

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E}\left(\sigma_t - \frac{1}{m}\sigma_r\right); \quad \varepsilon_r = \frac{1}{E}\left(\sigma_r - \frac{1}{m}\sigma_t\right)$$

und durch Auflösen nach σ_t und σ_r erhält man daraus

$$\sigma_t = \frac{mE}{m^2-1}(m\,\varepsilon_t + \varepsilon_r); \quad \sigma_r = \frac{mE}{m^2-1}(m\,\varepsilon_r + \varepsilon_t)$$

oder, wenn man die Werthe der specifischen Dehnungen aus den Gl. (211) und (212) einsetzt,

$$\sigma_t = \frac{mE}{m^2-1}\left(m\frac{u}{x} + \frac{du}{dx}\right); \quad \sigma_r = \frac{mE}{m^2-1}\left(m\frac{du}{dx} + \frac{u}{x}\right).$$

Diese Ausdrücke führen wir in Gl. (213) ein. Sie geht dann über in

$$m\frac{u}{x} + \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}\left(mx\frac{du}{dx} + u\right).$$

Ich möchte noch ausdrücklich die Aufmerksamkeit auf den Zweck hinlenken, der diesen Umrechnungen zu Grunde liegt. Gl. (213) gilt nämlich offenbar ganz allgemein, gleichgültig, ob der Körper dem Hooke'schen Gesetze folgt oder nicht. Sie enthält aber zwei unbekannte Grössen σ_t und σ_r und da andere Gleichgewichtsbedingungen nicht zur Verfügung stehen, wäre es nicht möglich, beide Unbekannten aus dieser einen Gleichung zu bestimmen. Das Problem ist und bleibt statisch unbestimmt, so lange man nicht auf Grund der elastischen Eigenschaften des Körpers noch eine andere Beziehung angeben kann. In der That hat die Untersuchung der elastischen Formänderung hier und in allen solchen Fällen nur den Zweck, die in grösserer Zahl vorkommenden Spannungscomponenten auf eine kleinere Zahl unbekannter Formänderungsgrössen zurückzuführen und dadurch die Lösung der Gleichungen zu ermöglichen. So sind wir hier jetzt dazu gelangt, die Gl. (213) so umzuformen, dass nur noch die eine Unbekannte u in ihr vorkommt.

Die letzte Gleichung vereinfacht sich nach Ausführung der Differentiation auf der rechten Seite zu

$$x^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + x \frac{du}{dx} - u = 0. \tag{214}$$

Sie stimmt fast genau überein mit der Differentialgleichung (155) für die Meridiancurve der elastischen Fläche einer kreisförmigen Platte und in der That gleicht auch die vorausgehende Entwickelung in vielen Punkten und namentlich in dem ganzen Plane der Untersuchung der damals durchgeführten. Man braucht in Gl. (155) nur $N = 0$ zu setzen und die abhängige Veränderliche mit u anstatt mit φ zu bezeichnen, um sie in Gl. (214) überzuführen. Daher gilt hier auch das frühere Integral, Gl. (156) in der Form

$$u = Bx + \frac{C}{x}. \tag{215}$$

Es fehlt jetzt nur noch die Ermittelung der Integrationsconstanten B und C. Für u selbst sind hier gar keine Grenzbedingungen vorgeschrieben, wohl aber für σ_r, denn für $x = a$, also an der Innenfläche, muss $\sigma_r = -p$ und für $x = b$, also aussen, muss $\sigma_r = 0$ werden. Um diese Bedingungen zur Berechnung der Integrationsconstanten verwerthen zu können, muss man zunächst den Ausdruck für σ_r aufstellen. Durch Einsetzen von u aus Gl. (215) geht dieser über in

$$\sigma_r = \frac{mE}{m-1} B - \frac{mE}{m+1} \frac{C}{x^2}.$$

Zur Abkürzung wollen wir dafür

$$\sigma_r = B' - \frac{C'}{x^2} \tag{216}$$

schreiben. Für die neuen Constanten B' und C' hat man nun die Gleichungen

$$-p = B' - \frac{C'}{a^2}; \quad 0 = B' - \frac{C'}{b^2},$$

aus denen durch Auflösen folgt

$$B' = p \frac{a^2}{b^2 - a^2}; \quad C' = p \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2}. \tag{217}$$

Für u hat man daher jetzt

$$u = p \frac{a^2}{mE(b^2 - a^2)} \left((m-1)x + (m+1) \frac{b^2}{x} \right). \tag{218}$$

Ferner folgt für σ_r und σ_t

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= p\frac{a^2}{b^2-a^2}\cdot\frac{x^2-b^2}{x^2}\\ \sigma_t &= p\frac{a^2}{b^2-a^2}\cdot\frac{x^2+b^2}{x^2}\end{aligned}\right\}. \qquad (219)$$

Je kleiner x ist, desto grössere Werthe nehmen beide Hauptspannungen an. Das Material wird also am meisten an der Innenseite des Rohrs beansprucht, was sich übrigens schon auf Grund einer einfachen Ueberlegung, die in § 48 angestellt wurde, voraussehen liess. Die grösste Anstrengung hängt von der grössten Dehnung ab, also

$$\sigma_{\text{red}} = E[\varepsilon_t]_{x=a} = E\left(\frac{u}{x}\right)_{x=a} = \frac{p}{b^2-a^2}\left(\frac{m-1}{m}a^2 + \frac{m+1}{m}b^2\right). \quad (220)$$

Anmerkung. Ein Schleifstein, der mit grosser Winkelgeschwindigkeit rotirt, wird in ganz ähnlicher Weise beansprucht, wie ein dickwandiges Rohr durch einen inneren Ueberdruck. Um diese Aufgabe zu lösen, betrachtet man den ruhenden Schleifstein und bringt an jedem Massen-Elemente eine Centrifugalkraft an, die nach bekannten Formeln berechnet werden kann. Der einzige Unterschied gegenüber der vorher behandelten Aufgabe besteht nun darin, dass die Belastung durch den inneren Flüssigkeitsdruck ersetzt ist durch die von den Centrifugalkräften herrührende Belastung, die sich über alle Massentheilchen des Schleifsteins vertheilt. Hiernach ist Gleichung (213) abzuändern, indem man auf der rechten Seite ein Glied zufügt, das der Belastung des Massenelementes durch die Centrifugalkraft entspricht. Die weitere Untersuchung kann aber dann in derselben Weise zu Ende geführt werden, wie vorher. Die Grenzbedingungen bestehen darin, dass sowohl am äusseren als am inneren Rande der Scheibe σ_r zu Null wird. — Herr Prof. Grübler hat diese Aufgabe eingehend behandelt (Zeitschr. d. V. D. Ing. 1897, S. 860 und 1899, S. 1294) und auch eine Reihe von Versuchen zur Prüfung der Theorie ausgeführt. Bei diesen wurde die Umdrehungsgeschwindigkeit so lange gesteigert, bis der Bruch der Steine erfolgte. Es ergab sich dabei, in Uebereinstimmung mit meinen früheren Untersuchungen über die Biegungsfestigkeit der Steine, dass die wahre Zugfestigkeit der Steine jedenfalls erheblich grösser ist, als sie durch unmittelbare Zugversuche gefunden wird. — Der einzige Einwand, den man gegen diese Versuche erheben kann, besteht darin, dass die zur Berechnung der Spannungen benutzten Formeln unter der Voraussetzung abgeleitet sind, dass das Material dem Superpositionsgesetze gehorche, was bei Steinen in Wirklichkeit nicht genau zutrifft. Hierdurch wird eine gewisse Ungenauigkeit in das Resultat gebracht. — Immerhin kann der Unterschied kaum so erheblich sein, um jenes Hauptergebniss über das Verhältniss zwischen der wahren Zugfestigkeit und der durch gewöhnliche Zugversuche ermittelten scheinbaren Zugfestigkeit der Steine zu erschüttern.

§ 51. Ringgeschütz.

Wenn ein Gefäss einem sehr hohen inneren Ueberdrucke ausgesetzt ist, wie z. B. ein Geschützlauf oder der Cylinder einer hydraulischen Presse, nützt die Vergrösserung der Wandstärke schliesslich nicht mehr viel, da sich die aussen hinzukommenden Schichten, wie aus den Untersuchungen des vorigen Paragraphen hervorgeht, viel weniger an der Aufnahme der Spannungen betheiligen, als die inneren, die dadurch entlastet werden sollen. Man hilft sich dann oft damit, dass man das Rohr aus zwei Theilen herstellt, von denen der äussere auf einen etwas kleineren Durchmesser ausgebohrt wird, als der äussere Durchmesser des inneren Rohrs, auf das er aufgesteckt werden soll. Um das eine Rohr über das andere schieben zu können, erwärmt man es um so viel, dass es darüber geht. Beim Abkühlen wird dann das innere Rohr zusammengepresst und das äussere bleibt etwas ausgedehnt. Dadurch kommen von vornherein Spannungen in das zusammengesetzte Rohr, Zugspannungen σ_t im äusseren und Druckspannungen σ_t im inneren Theile. Wenn nun ein Schuss abgefeuert oder sonst das Rohr einem inneren Ueberdrucke ausgesetzt wird, treten überall noch Zugspannungen σ_t hinzu. An der Innenseite des Rohrs bewirken diese zunächst nur eine Verminderung oder Aufhebung der vorher dort bestehenden Druckspannungen und nur der Ueberschuss über diese kommt wirklich zur Geltung. Im äusseren Theile dagegen addiren sich die aus beiden Ursachen stammenden Zugspannungen einfach. Man erreicht durch diese Anordnung daher eine gleichmässigere Ausnutzung des Materials, die natürlich noch gesteigert werden