Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

Ausknicken von Flammröhren.

einen Streifen von der Länge 1 in der Richtung der Rohraxe bezieht, ist es gleich $\frac{h^3}{12}$, wenn die Wandstärke des Rohrs mit h bezeichnet wird, und daher

$$p_k = \frac{E}{3}\left(\frac{h}{c}\right)^3. \tag{210}$$

Der hier behandelte Fall ist der erste, bei dem ein labiles elastisches Gleichgewicht bisher vorkam; ähnliche Fälle werden uns später noch begegnen, der wichtigste unter allen ist jener, der bei der Knickfestigkeit vorliegt. In Anknüpfung daran pflegt man die hier untersuchte Erscheinung, die jener bei der Knickfestigkeit genau gleicht, auch als ein Ausknicken der Rohrwand zu bezeichnen.

Wenn das Rohr nur kurz und an den Enden durch Böden oder in anderer Weise versteift ist, kann die hier besprochene Ausknickung der Rohrwand nicht zu Stande kommen. Bei dem Flammrohre eines Dampfkessels ist die Länge immer so gross gegen den Durchmesser, dass diese Versteifung das Ausknicken des mittleren Theiles nicht zu verhüten vermag. Dagegen sucht man in solchen Fällen öfters dadurch eine grössere Steifigkeit der Rohrwand herbeizuführen, dass man in gewissen Abständen Ringe aus Winkeleisen u. s. w. herumlegt. In solchen Fällen muss man sich zur Berechnung an Stelle von Gl. (210) der Gl. (209) bedienen, indem man den Zuwachs des Trägheitsmoments durch den Ring auf einen Streifen von der Länge 1 ausschlägt.

In Gl. (207) kommen noch zwei unbestimmte Constanten vor, nämlich y_0 und M_0. Wenn sich deren Ermittelung auch nicht als nöthig zur Lösung der uns hier beschäftigenden Frage herausgestellt hat, so mag doch noch bemerkt werden, dass eine Beziehung zwischen diesen Constanten aus der Bedingung hervorgeht, dass der verbogene Querschnittsumriss dieselbe Länge haben muss, wie der ursprüngliche Kreis. Ich verzichte darauf, die Rechnung hier durchzuführen und erwähne nur, dass diese Bedingung in der Form

$$\int y\,dx + \frac{c}{2}\int\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx = 0$$

ausgedrückt werden kann, wenn sich die Integrale über den ganzen Quadranten $\left(\text{von } 0 \text{ bis } \frac{\pi c}{2}\right)$ erstrecken. — Eine Constante, die sich nicht näher ermitteln lässt, bleibt aber in Gl. (207) jedenfalls bestehen. Dieser Umstand erklärt sich damit, dass in der That verschieden stark abgeplattete Gleichgewichtsfiguren (mit beliebigen Werthen von y_0, falls diese nur überhaupt noch als klein gegen c betrachtet werden können) möglich sind, wenn der kritische Ueberdruck p_k besteht. Eine dieser Lagen ist ebenso gut möglich, als die andere, d. h. das Gleichgewicht ist in jeder dieser Lagen (und daher auch in der ursprünglichen Kreisform) indifferent; labil wird es für die Kreisform, sobald p den Werth p_k überschreitet. Da unendlich viele Bogenformen von verschiedener Abplattung den Bedingungen unserer Rechnung genügen, muss eine willkürlich zu wählende Constante übrig bleiben, die sich aus den Angaben der Aufgabe nicht ermitteln lässt.

Anmerkung. In der ersten Auflage hatte ich die Untersuchung unter der Voraussetzung durchgeführt, dass die Gestalt des deformirten Querschnittsumrisses als eine Ellipse betrachtet werden dürfe. Hierbei machte sich im Laufe der Betrachtung auch sonst noch eine Annahme nöthig, die nicht als genau richtig anzusehen ist. Durch die inzwischen erschienene, vorher schon erwähnte Abhandlung von Prof. Forchheimer wurde ich dann auf die jetzt wiedergegebene richtige Lösung aufmerksam. Früher hatte ich an Stelle von Gl. (210)

$$p_k = \frac{E}{4}\left(\frac{h}{c}\right)^3$$

gefunden; in Wirklichkeit ist daher der kritische Ueberdruck im Verhältnisse 4 : 3 höher anzunehmen, als nach der ungenauen früheren Betrachtung.

Hierbei möchte ich noch erwähnen, dass ich freilich nicht in allen Einzelheiten mit den Annahmen und Rechnungen meines verehrten Collegen Forchheimer übereinzustimmen vermag. Namentlich halte ich die Annahme, dass nach der hier eingeführten Bezeichnung y an den beiden Punkten A und B von gleicher Grösse und entgegengesetztem Vorzeichen sei, für nicht zutreffend. Auch einer Bemerkung über den Einfluss der Querdehnung kann ich mich nicht ganz anschliessen. Indessen handelt es sich hierbei nur um untergeordnete Punkte, während der ganze Gang der Untersuchung ohne jede wesentliche Aenderung von dort übernommen wurde.

§ 50. **Dickwandige Röhren.**

Der Einfachheit wegen betrachte ich nur den Fall, dass das Rohr einem inneren Ueberdrucke ausgesetzt ist; für äusseren Ueberdruck gelten die Betrachtungen ebenfalls, wenn man nur überall die Vorzeichen der Dehnungen und Spannungen umkehrt.

Aus Symmetriegründen folgt, dass von den drei Hauptaxen des Spannungszustandes für jede Stelle der Rohrwand eine parallel zur Rohraxe geht, eine zweite in die Richtung des Radius und eine dritte in die Richtung der Tangente an den Kreis fällt, der durch den gegebenen Punkt von der Rohraxe aus gelegt werden kann. Um die Spannungen und Dehnungen in der Richtung der Rohraxe will ich mich jetzt nicht kümmern; man kann sie nachträglich ermitteln und in Berücksichtigung ziehen. Wichtiger sind die beiden anderen Hauptspannungen und namentlich die in der Richtung der Tangente σ_t, denn man weiss schon aus den vorausgehenden Untersuchungen, dass die Bruchgefahr in erster Linie von ihr abhängt.

Um dieser Behandlung der Aufgabe den geeigneten Ausdruck zu geben, setze ich jetzt voraus, dass das Rohr an den Enden nicht geschlossen sei und sich in der Richtung der Rohraxe beliebig ausdehnen und zusammenziehen könne, während zugleich auf die Innenwand der specifische Druck p ausgeübt wird. Um das Mitschleppen eines überflüssigen Faktors zu vermeiden, betrachte ich wieder ein Stück des Rohrs von der Länge $= 1$.

Unter dem Einflusse des inneren Druckes erweitert sich das Rohr und die elastische Vergrösserung, die ein Radius x erfährt, der nach irgend einem Theilchen der Rohrwand gezogen ist, sei mit u bezeichnet. Wenn u als Function von x bekannt wäre, könnte man daraus die Dehnungen ε_t und ε_r in der Richtung der Tangente und des Radius und hiermit auch die zugehörigen Spannungen σ_t und σ_r berechnen; die Aufgabe