Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

§. 49. Röhren von ovalem Querschnitt und Röhren von kreisförmigem Querschnitte unter äusserem Ueberdrucke.

urn:nbn:de:hbz:466:1-84594

stehen. Dieselbe Ueberlegung wie beim Kugelkessel liefert die Gleichgewichtsbedingung

$$2hl\sigma_t = 2rlp \quad \text{oder} \quad \sigma_t = \frac{pr}{h}. \tag{201}$$

Die Wandspannung σ_t in der Richtung der Tangente an den Kreisumfang ist daher beim cylindrischen Kessel doppelt so gross als beim Kugelkessel von demselben Durchmesser.

Für die Spannungen σ_a in der Richtung der Cylinderaxe, die in einem Querschnitte übertragen werden, gilt dagegen dieselbe Gleichgewichtsbedingung (199) wie für den Kugelkessel. Für die reducirte Spannung hat man daher

$$\sigma_{\text{red}} = \sigma_t - \frac{1}{m}\sigma_a = \frac{2m-1}{2m}\frac{pr}{h} = 0{,}85\frac{pr}{h}\left(\text{für } m = \frac{10}{3}\right). \tag{202}$$

Wenn die Kesselböden Halbkugeln bilden, ist ihre Berechnung schon durch jene des Kugelkessels erledigt. In anderen Fällen wird man sie als Kugelhauben ansehen können und man berechnet dann die Wandspannung in ihnen so, als wenn sie Bestandtheile eines ganzen Kugelkessels von dem betreffenden Halbmesser wären. Unter Umständen käme auch, wenn die Böden etwa durch ebene gusseiserne Platten gebildet sein sollten, die Berechnung nach den Lehren des vorigen Abschnitts in Betracht.

§ 49. Röhren von ovalem Querschnitte und Röhren von kreisförmigem Querschnitte unter äusserem Ueberdrucke.*)

Eine Röhre von ovalem Querschnitte kann genau so berechnet werden, wie es im 5. Abschnitte für einen Ring auseinander gesetzt wurde. Der durch Abb. 47, S. 240 dargestellte Fall entspricht fast vollständig dem hier vorliegenden; man muss sich nur die Lasten gleichförmig über den ganzen Umfang vertheilt denken. Die Durchführung der Rechnungen

*) Dieser Paragraph ist auf Grund einer in der Zeitschr. d. österr. Ing. u. Arch. Ver. 1899, Nr. 29 erschienenen Abhandlung von Prof. Forchheimer vollständig umgearbeitet worden.

bietet auch keine besonderen Schwierigkeiten. Es wäre daher nicht nöthig, hier noch näher darauf einzugehen — um so weniger, als Röhren von ovalem Querschnitte, wegen des geringen Widerstandes, den sie einer Verbiegung entgegensetzen, zur Herstellung von Gefässen, die einem grösseren Flüssigkeitsdrucke ausgesetzt sind, nur ganz selten verwendet werden — wenn nicht eine Frage von ganz eigener Art dazu führte. Man denke sich nämlich ein ursprünglich genau kreisrundes Rohr durch einen zufälligen Umstand in der einen Richtung etwas elastisch zusammengedrückt, so dass der Querschnitt eine längliche Gestalt annimmt. Wenn die äussere Veranlassung wegfällt, geht das Rohr ohne Zweifel wieder in seine ursprüngliche Gestalt zurück, wenn es unter einem inneren Ueberdrucke steht. Man kann aber im Zweifel sein, ob dies auch zutrifft, wenn das Rohr von aussen her einem Ueberdrucke ausgesetzt ist. Denn ohne jede Rechnung sieht man schon ein, dass ein äusserer Ueberdruck die vorher bewirkte Abplattung aufrecht zu halten und noch zu vergrössern sucht. Es fragt sich also, ob diese Wirkung des äusseren Ueberdrucks oder ob die elastischen Kräfte, die dem Rohre die ursprüngliche Gestalt zurückzugeben suchen, die Oberhand behalten. Diese praktisch recht wichtige Frage (man denke nur an die Flammröhren der Dampfkessel) erfordert zu ihrer Beantwortung eine eingehende Rechnung.

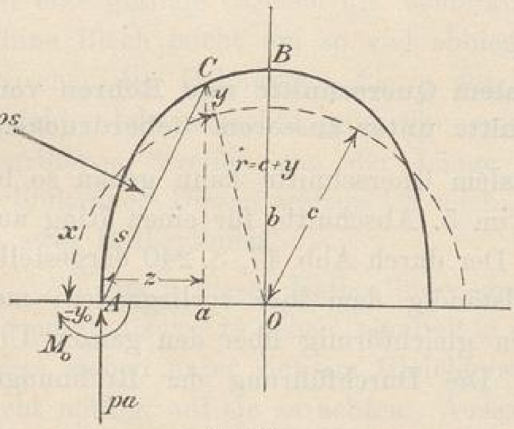

Abb. 56.

In Abb. 56 ist eine Hälfte des Rohrquerschnitts gezeichnet, von dem ich annehme, dass er nur wenig von der gleichfalls gestrichelt eingetragenen ursprünglichen Kreisform abweiche. Ich nehme ferner an, dass der Rohrumriss nach der Formänderung zwei zu einander senkrechte Symmetrieaxen besitze, so dass es genügt, die Betrachtung auf den einen Quadranten AB zu beschränken. Ueber die besondere Gestalt des Rohrumrisses wird dagegen im Uebrigen keine nähere Annahme gemacht; vielmehr wird sich jene aus der weiteren Untersuchung von selbst ergeben. Ich betrachte einen Streifen von der Länge 1 in der Richtung der Rohraxe, um die Mitschleppung eines constanten Faktors in allen Gliedern der Gleichungen, der sich nachher doch wieder weghebt, von vornherein zu vermeiden.

Die an der Schnittstelle A übertragenen Spannungen lassen sich genau so wie bei der bereits in § 36 durchgeführten Berechnung eines (nur in etwas anderer Weise belasteten) Ringes durch eine centrisch angreifende Druckkraft pa und ein Biegungsmoment M_0 ersetzen, das vorläufig unbekannt ist. Auch das Biegungsmoment M an der Stelle C erhält man in der schon von früher bekannten Weise zu

$$M = M_0 + paz - p\frac{s^2}{2}.$$

Hierbei ist der Flüssigkeitsdruck auf den Bogenumfang AC durch den auf die zugehörige Sehne s ersetzt; p gibt den äusseren Ueberdruck auf die Flächeneinheit an. Aus dem Dreiecke ACO folgt

$$r^2 = s^2 + a^2 - 2az, \quad \text{also} \quad \frac{s^2}{2} - az = \frac{r^2 - a^2}{2}.$$

Setzt man dies ein, so geht der Werth von M über in

$$M = M_0 - p\frac{r^2 - a^2}{2}.$$

Nun kann $r = c + y$ und $a = c + y_0$ gesetzt werden, wobei zu beachten ist, dass alle y kleine Grössen sind gegenüber dem Kreishalbmesser c und dass ferner y positiv zählen soll, wenn es über den Kreis hinaus reicht (so dass also die Strecke y_0 in der Zeichnung einen negativen Werth bedeutet). Die vorige Gleichung geht damit über in

$$M = M_0 - p\frac{2cy + y^2 - 2cy_0 - y_0^2}{2} = M_0 - pc(y - y_0), \quad (203)$$

wenn y gegenüber c vernachlässigt wird.

Für y besteht nach Gl. (112^b, S. 211) die Beziehung

$$E\Theta \frac{d^2y}{dx^2} = \pm M.$$

Das früher unbestimmt gelassene Vorzeichen von M richtet sich nach den Festsetzungen, die über die Vorzeichen der Momente M und der Strecken y getroffen sind. Man erkennt aus Abb. 56, dass y mit wachsendem x innerhalb des ganzen Quadranten fortwährend zunimmt, dass also $\frac{dy}{dx}$ überall positiv ist; nur an den Enden des Quadranten bei A und bei B hat $\frac{dy}{dx}$ den Werth Null, weil die deformirte Curve an diesen Stellen eine zur Kreistangente parallele Tangente hat. Hiernach nimmt $\frac{dy}{dx}$ von A aus mit wachsendem x zunächst zu und später wieder ab. Solange x nicht zu gross wird, ist daher $\frac{d^2y}{dx^2}$ jedenfalls positiv. An diesen Stellen ist aber auch M positiv, da ein rechts drehendes Moment als positiv angesehen wurde. Wir haben daher in Gl. (112^b) in diesem Falle das positive Vorzeichen zu wählen. Setzen wir ausserdem den vorher festgestellten Werth von M ein, so erhalten wir

$$E\Theta \frac{d^2y}{dx^2} = M_0 + pcy_0 - pcy. \tag{204}$$

Diese Differentialgleichung spricht das Gesetz aus, nach dem sich eine Formänderung des ursprünglich kreisförmigen Rohrquerschnitts vollzogen haben muss, wenn die neue Form unter der Einwirkung der vorhandenen Lasten eine Gleichgewichtsfigur bilden soll.

Die allgemeine Lösung von Gl. (204) lautet

$$y = y_0 + \frac{M_0}{pc} + A \sin \alpha x + B \cos \alpha x, \tag{205}$$

in der A und B die beiden willkürlichen Integrations-Constanten sind, während α eine Constante ist, die so ermittelt werden muss, dass die Lösung richtig ist. Durch Einsetzen in die Differentialgleichung findet man, dass diese durch den angegebenen Ausdruck identisch befriedigt wird, sofern man der Constanten α den Werth

$$\alpha = \sqrt{\frac{pc}{E\Theta}} \tag{206}$$

beilegt. Die Integrationsconstanten sind aus den Grenzbedingungen zu bestimmen. Am Anfange des Quadranten, also für $x = 0$, muss $\frac{dy}{dx} = 0$ und $y = y_0$ werden. Die erste Bedingung liefert $A = 0$ und aus der zweiten folgt $B = -\frac{M_0}{pc}$, womit Gl. (205) übergeht in

$$y = y_0 + \frac{M_0}{pc}(1 - \cos \alpha x). \tag{207}$$

Ausserdem muss auch noch am anderen Ende des Quadranten, also für $x = \frac{\pi c}{2}$ der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ zu Null werden. Diese Bedingung liefert

$$\sin \frac{\pi \alpha c}{2} = 0 \quad \text{oder} \quad \alpha c = 2. \tag{208}$$

Der Werth von α hängt nämlich, wie aus Gl. (206) hervorgeht, vom äusseren Flüssigkeitsdrucke p ab. Wenn dieser allmählich steigt, nimmt auch α zu. Anfänglich ist der Druck nicht ausreichend, um die verbogene Form des Rohrquerschnitts aufrecht zu erhalten. Wir sehen jetzt aus Gl. (208), wie gross α und daher auch p geworden sein muss, damit die verbogene Form eine Gleichgewichtsfigur bilden kann. Die Fälle $\alpha c = 4$ u. s. f., bei denen der Sinus ebenfalls verschwinden würde, kommen daher nicht in Betracht. Nach Einsetzen von α aus Gl. (206) und Auflösen nach p findet man aus Gl. (208) den kritischen Ueberdruck p_k

$$p_k = \frac{4E\Theta}{c^3}. \tag{209}$$

Ist p kleiner als p_k, so kann sich die deformirte Gestalt des Rohrquerschnitts nicht aufrecht erhalten, sondern die Verbiegung wird, sobald die störende Ursache entfernt ist, von selbst wieder rückgängig. Umgekehrt wird bei grösserem p die Abplattung von selbst weiter fortschreiten und zu einem Zusammenbruche des Rohres führen. — Für das Trägheitsmoment Θ ist noch der Werth einzusetzen. Da es sich auf einen Streifen von der Länge 1 in der Richtung der Rohraxe bezieht, ist es gleich $\frac{h^3}{12}$, wenn die Wandstärke des Rohrs mit h bezeichnet wird, und daher

$$p_k = \frac{E}{3}\left(\frac{h}{c}\right)^3. \tag{210}$$

Der hier behandelte Fall ist der erste, bei dem ein labiles elastisches Gleichgewicht bisher vorkam; ähnliche Fälle werden uns später noch begegnen, der wichtigste unter allen ist jener, der bei der Knickfestigkeit vorliegt. In Anknüpfung daran pflegt man die hier untersuchte Erscheinung, die jener bei der Knickfestigkeit genau gleicht, auch als ein Ausknicken der Rohrwand zu bezeichnen.

Wenn das Rohr nur kurz und an den Enden durch Böden oder in anderer Weise versteift ist, kann die hier besprochene Ausknickung der Rohrwand nicht zu Stande kommen. Bei dem Flammrohre eines Dampfkessels ist die Länge immer so gross gegen den Durchmesser, dass diese Versteifung das Ausknicken des mittleren Theiles nicht zu verhüten vermag. Dagegen sucht man in solchen Fällen öfters dadurch eine grössere Steifigkeit der Rohrwand herbeizuführen, dass man in gewissen Abständen Ringe aus Winkeleisen u. s. w. herumlegt. In solchen Fällen muss man sich zur Berechnung an Stelle von Gl. (210) der Gl. (209) bedienen, indem man den Zuwachs des Trägheitsmoments durch den Ring auf einen Streifen von der Länge 1 ausschlägt.

In Gl. (207) kommen noch zwei unbestimmte Constanten vor, nämlich y_0 und M_0. Wenn sich deren Ermittelung auch nicht als nöthig zur Lösung der uns hier beschäftigenden Frage herausgestellt hat, so mag doch noch bemerkt werden, dass eine Beziehung zwischen diesen Constanten aus der Bedingung hervorgeht, dass der verbogene Querschnittsumriss dieselbe Länge haben muss, wie der ursprüngliche Kreis. Ich verzichte darauf, die Rechnung hier durchzuführen und erwähne nur, dass diese Bedingung in der Form

$$\int y dx + \frac{c}{2}\int\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx = 0$$

ausgedrückt werden kann, wenn sich die Integrale über den ganzen Quadranten $\left(\text{von } 0 \text{ bis } \frac{\pi c}{2}\right)$ erstrecken. — Eine Constante, die sich nicht näher ermitteln lässt, bleibt aber in Gl. (207) jedenfalls bestehen. Dieser Umstand erklärt sich damit, dass in der That verschieden stark abgeplattete Gleichgewichtsfiguren (mit beliebigen Werthen von y_0, falls diese nur überhaupt noch als klein gegen c betrachtet werden können) möglich sind, wenn der kritische Ueberdruck p_k besteht. Eine dieser Lagen ist ebenso gut möglich, als die andere, d. h. das Gleichgewicht ist in jeder dieser Lagen (und daher auch in der ursprünglichen Kreisform) indifferent; labil wird es für die Kreisform, sobald p den Werth p_k überschreitet. Da unendlich viele Bogenformen von verschiedener Abplattung den Bedingungen unserer Rechnung genügen, muss eine willkürlich zu wählende Constante übrig bleiben, die sich aus den Angaben der Aufgabe nicht ermitteln lässt.

Anmerkung. In der ersten Auflage hatte ich die Untersuchung unter der Voraussetzung durchgeführt, dass die Gestalt des deformirten Querschnittsumrisses als eine Ellipse betrachtet werden dürfe. Hierbei machte sich im Laufe der Betrachtung auch sonst noch eine Annahme nöthig, die nicht als genau richtig anzusehen ist. Durch die inzwischen erschienene, vorher schon erwähnte Abhandlung von Prof. Forchheimer wurde ich dann auf die jetzt wiedergegebene richtige Lösung aufmerksam. Früher hatte ich an Stelle von Gl. (210)

$$p_k = \frac{E}{4}\left(\frac{h}{c}\right)^3$$

gefunden; in Wirklichkeit ist daher der kritische Ueberdruck im Verhältnisse 4 : 3 höher anzunehmen, als nach der ungenauen früheren Betrachtung.

Hierbei möchte ich noch erwähnen, dass ich freilich nicht in allen Einzelheiten mit den Annahmen und Rechnungen meines verehrten Collegen Forchheimer übereinzustimmen vermag. Namentlich halte ich die Annahme, dass nach der hier eingeführten Bezeichnung y an den beiden Punkten A und B von gleicher Grösse und entgegengesetztem Vorzeichen sei, für nicht zutreffend. Auch einer Bemerkung über den Einfluss der Querdehnung kann ich mich nicht ganz anschliessen. Indessen handelt es sich hierbei nur um untergeordnete Punkte, während der ganze Gang der Untersuchung ohne jede wesentliche Aenderung von dort übernommen wurde.

§ 50. **Dickwandige Röhren.**

Der Einfachheit wegen betrachte ich nur den Fall, dass das Rohr einem inneren Ueberdrucke ausgesetzt ist; für äusseren Ueberdruck gelten die Betrachtungen ebenfalls, wenn man nur überall die Vorzeichen der Dehnungen und Spannungen umkehrt.

Aus Symmetriegründen folgt, dass von den drei Hauptaxen des Spannungszustandes für jede Stelle der Rohrwand eine parallel zur Rohraxe geht, eine zweite in die Richtung des Radius und eine dritte in die Richtung der Tangente an den Kreis fällt, der durch den gegebenen Punkt von der Rohraxe aus gelegt werden kann. Um die Spannungen und Dehnungen in der Richtung der Rohraxe will ich mich jetzt nicht kümmern; man kann sie nachträglich ermitteln und in Berücksichtigung ziehen. Wichtiger sind die beiden anderen Hauptspannungen und namentlich die in der Richtung der Tangente σ_t, denn man weiss schon aus den vorausgehenden Untersuchungen, dass die Bruchgefahr in erster Linie von ihr abhängt.

Um dieser Behandlung der Aufgabe den geeigneten Ausdruck zu geben, setze ich jetzt voraus, dass das Rohr an den Enden nicht geschlossen sei und sich in der Richtung der Rohraxe beliebig ausdehnen und zusammenziehen könne, während zugleich auf die Innenwand der specifische Druck p ausgeübt wird. Um das Mitschleppen eines überflüssigen Faktors zu vermeiden, betrachte ich wieder ein Stück des Rohrs von der Länge $= 1$.

Unter dem Einflusse des inneren Druckes erweitert sich das Rohr und die elastische Vergrösserung, die ein Radius x erfährt, der nach irgend einem Theilchen der Rohrwand gezogen ist, sei mit u bezeichnet. Wenn u als Function von x bekannt wäre, könnte man daraus die Dehnungen ε_t und ε_r in der Richtung der Tangente und des Radius und hiermit auch die zugehörigen Spannungen σ_t und σ_r berechnen; die Aufgabe