



Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

§. 42. Genauere Theorie der kreisförmigen Platte mit symmetrischer Belastung.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-84594](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-84594)

Siebenter Abschnitt.

Die Festigkeit von ebenen Platten, die am ganzen Umfange unterstützt sind.

§ 42. Genauere Theorie der kreisförmigen Platte mit symmetrischer Belastung.

Als Belastung nehme ich hier entweder eine Einzellast in der Mitte oder einen gleichförmig über die ganze Fläche vertheilten Druck an, obschon die Aufgabe in ganz gleicher Weise auch für eine andere Lastvertheilung gelöst werden kann, wenn diese nur symmetrisch ist, d. h. wenn sie in gleichen Abständen von der Mitte ringsum gleich ist. Für andere Lastvertheilungen wird die Rechnung zu verwickelt; man ist dann in der Praxis auf eine Schätzung angewiesen. Glücklicherweise kommen aber die Fälle der symmetrischen Lastvertheilung weitaus am häufigsten vor.

Ferner setze ich voraus, dass auch die Stützung der Platte am Rande überall in der gleichen Weise erfolgt und zwar entweder so, dass die Platte am Rande eingeklemmt ist, oder so, dass sie frei aufliegt. Der letzte Fall ist im Gegensatze zur Biegungstheorie des Balkens schwieriger zu behandeln, als der andere. Bei der frei aufliegenden Platte betheiligen sich nämlich auch die über den Auflagerkreis hinausreichenden Theile der Platte an der Kraftübertragung und es ist daher keineswegs gleichgültig, um wie viel die Platte übersteht. Ich werde indessen annehmen, dass sie nur wenig übersteht, so

dass die Spannungen in dem überstehenden Theile unberücksichtigt bleiben können.

Von vornherein ist klar, dass die Untersuchung in einer gewissen Verwandtschaft mit der Biegungstheorie des Balkens steht und in der That lehnt sich die Betrachtung im grossen Ganzen an die dort durchgeführte an. An die Stelle der elastischen Linie tritt hier die elastische Fläche, in die die Mittelebene der Platte (so soll die in der halben Plattendicke parallel zu den Grenzflächen gezogene Ebene genannt werden) durch die Formänderung übergeführt wird. Wie früher beim Balken nehmen wir an, dass die Ordinaten y der elastischen Fläche, von der ursprünglichen Lage der Mittelebene an gerechnet, klein bleiben. Der Symmetrie wegen hängt y nur von dem Abstände x von der Symmetrieaxe (d. h. von der im Mittelpunkte der Mittelebene zu dieser errichteten Senkrechten) ab; die elastische Fläche ist also eine Umdrehungsfläche. Dann sollen auch die etwa parallel zur Mittelebene auftretenden elastischen Verschiebungen von Punkten der Mittelebene gegenüber den Ordinaten y vernachlässigt werden, wie es schon beim Balken geschehen ist.

Auch eine Voraussetzung über die besondere Art der Formänderung, die der Bernouilli'schen Annahme, dass die Querschnitte des Balkens bei der Biegung eben bleiben, entspricht, ist hier erforderlich. Wir setzen als hinreichend genau zutreffend voraus, dass alle Punkte der Platte, die vorher auf einer zur Mittelebene senkrecht gezogenen Graden lagen, auch nach der Formänderung noch auf einer Graden liegen, die der Symmetrie wegen die Symmetrieaxe der Platte schneiden muss (wenn sie nicht parallel zu ihr bleibt). Ein ringförmig um die Symmetrieaxe gezogener cylindrischer Schnitt, der etwa dem Querschnitte beim Balken entspricht, soll also durch die Formänderung nur in eine Kegelfläche übergehen können.

Nach diesen Festsetzungen müssen wir, wie es früher beim Balken geschehen ist, zunächst einen Ausdruck für die specifischen Längenänderungen aufstellen, die bei der Formänderung eintreten, und daraus einen Schluss über die Spannungsver-

theilung ziehen. In einem Punkte, der den Abstand x von der Symmetrieaxe und den Abstand z von der Mittelebene hat (vgl. Abb. 54) treten Dehnungen in tangentialer und in radialer Richtung auf, die wir mit ε_t und ε_r bezeichnen. Der durch den Punkt gehende Kreis vom Radius x hat sich nämlich wegen der Neigung φ , die die Normale zur elastischen Fläche gegen die Symmetrieaxe angenommen hat, um den Betrag $z\varphi$ vergrößert. Der Neigungswinkel φ wird als hinreichend klein

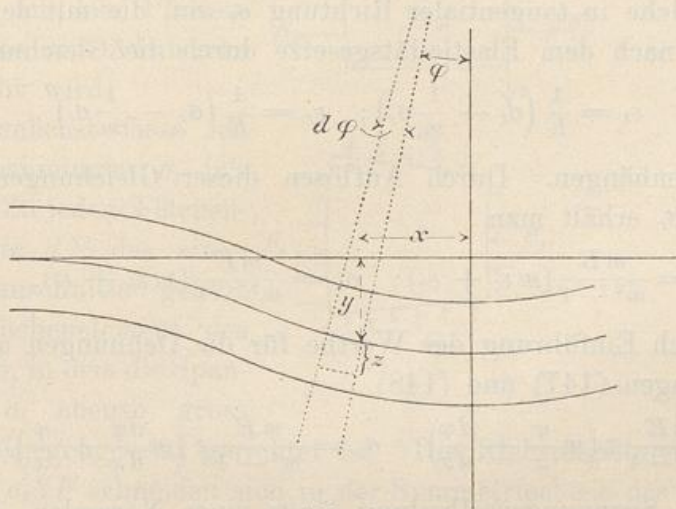


Abb. 54.

vorausgesetzt, um den Bogen an Stelle des Sinus nehmen zu können. In demselben Verhältnisse wie der Radius wächst auch der Umfang eines Kreises und hierdurch kommt die spezifische Dehnung ε_t in tangentialer Richtung zu Stande. Man hat daher

$$\varepsilon_t = \frac{z\varphi}{x}. \quad (147)$$

Um die Dehnung in radialer Richtung zu ermitteln, ziehe ich im Abstände dx eine zweite Normale zur elastischen Fläche. Der Winkel zwischen beiden Normalen ist mit $d\varphi$ zu bezeichnen. Die durch den Punkt z gehende Faser ist zwischen beiden Normalen um $zd\varphi$ länger geworden, als die Faser in der Mittelebene, die unverändert blieb. Die spezifische Deh-

nung ε_r folgt daraus durch Division mit der ursprünglichen Länge dx , also

$$\varepsilon_r = \frac{z d\varphi}{dx}. \quad (148)$$

Dieser letzte Ausdruck entspricht genau dem früher für den Balken festgestellten; dagegen kommt bei der Platte die Dehnung ε_t hinzu, die beim Balken gleichgültig blieb. Es treten daher hier neben den Spannungen in radialer Richtung σ_r (entsprechend den Biegungsspannungen des Balkens) auch noch solche in tangentialer Richtung σ_t auf, die mit den Dehnungen nach dem Elasticitätsgesetze durch die Gleichungen

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E} \left(\sigma_t - \frac{1}{m} \sigma_r \right); \quad \varepsilon_r = \frac{1}{E} \left(\sigma_r - \frac{1}{m} \sigma_t \right)$$

zusammenhängen. Durch Auflösen dieser Gleichungen nach σ_t und σ_r erhält man

$$\sigma_t = \frac{mE}{m^2 - 1} (m\varepsilon_t + \varepsilon_r); \quad \sigma_r = \frac{mE}{m^2 - 1} (m\varepsilon_r + \varepsilon_t), \quad (149)$$

oder nach Einführung der Werthe für die Dehnungen aus den Gleichungen (147) und (148)

$$\sigma_t = \frac{mE}{m^2 - 1} z \left(m \frac{\varphi}{x} + \frac{d\varphi}{dx} \right); \quad \sigma_r = \frac{mE}{m^2 - 1} z \left(m \frac{d\varphi}{dx} + \frac{\varphi}{x} \right). \quad (150)$$

Die Spannungsvertheilung längs einer Normalen, sowohl die von σ_r als die von σ_t , befolgt daher ein lineares Gesetz; die Spannungen sind den Abständen von der Mittelebene proportional.

Nachdem diese Ausdrücke für die Spannungen ermittelt sind, müssen wir das Gleichgewicht eines Plattenelementes untersuchen. Zu diesem Zwecke denke ich mir durch die Symmetrieaxe zwei Meridianebenen gelegt, die einen beliebigen unendlich kleinen Winkel $d\alpha$ miteinander bilden; von der Formänderung bleibt dieser unberührt. Zwischen beiden Ebenen lege ich ferner zwei cylindrische Schnitte mit den Radien x und $x + dx$. Hierdurch wird das in Abb. 55 in Aufriss und Grundriss gezeichnete Plattenelement abgegrenzt. An den vier Schnittflächen treten zunächst die Spannungen σ_r und σ_t auf, die sich an jeder Schnittfläche zu einem Kräftepaare zusammen-

setzen lassen. Ausserdem kommen aber an den cylindrischen Schnittflächen noch die Schubspannungen τ vor, durch die die Last im mittleren Theile der Platte nach dem Auflager übertragen wird. Wir haben eine Gleichung aufzustellen, durch die die Bedingung für das Gleichgewicht aller dieser Kräfte an dem Plattenelemente zum Ausdrucke gebracht wird.

Zunächst fasse ich die Spannungen σ_t in's Auge. Zu jedem Flächenelemente dF des einen Meridianschnitts gehört ein Flächenelement des anderen, in dem die Spannung σ_t ebenso gross

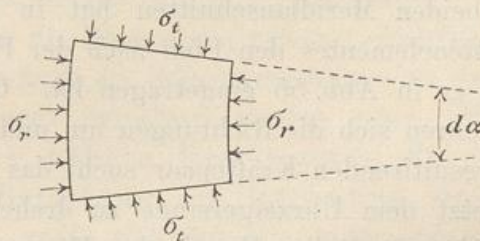
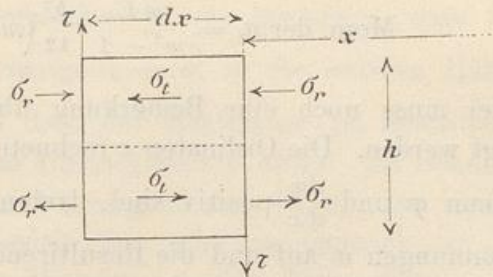


Abb. 55.

und entgegengesetzt gerichtet ist. Die Richtungslinien beider Kräfte $\sigma_t dF$ schneiden sich in der Symmetrieebene des Plattenelementes und ich will mir beide an diesem Angriffspunkte zu einer Resultirenden vereinigt denken. Diese fällt selbst in die Symmetrieebene und sie hat die Grösse $\sigma_t dF \cdot d\alpha$. In der Symmetrieebene lassen sich alle die Kräfte, die zu den verschiedenen Flächenelementen dF eines Meridianschnitts gehören, zu einem resultirenden Kräftepaare vereinigen, dessen Moment leicht festgestellt werden kann. Für einen auf der Mittelebene gelegenen Momentenpunkt hat nämlich die Kraft $\sigma_t dF d\alpha$ das Moment $\sigma_t z dF d\alpha$ und im Ganzen ist daher, mit Berücksichtigung von Gl. (150)

$$\text{Mom. der } \sigma_t = d\alpha \int \sigma_t z dF = d\alpha \frac{mE}{m^2 - 1} \left(m \frac{\varphi}{x} + \frac{d\varphi}{dx} \right) \int z^2 dF.$$

Das hier noch vorkommende Integral ist das Trägheitsmoment der Meridianschnittfläche und daher

$$\int z^2 dF = dx \frac{h^3}{12}.$$

Damit erhalten wir schliesslich

$$\text{Mom. der } \sigma_t = \frac{mE}{m^2-1} \cdot \frac{h^3}{12} \left(m \frac{\varphi}{x} + \frac{d\varphi}{dx} \right) dx d\alpha. \quad (151)$$

Hier muss noch eine Bemerkung über das Vorzeichen beigelegt werden. Die Ordinaten z rechnet ich nach abwärts positiv. Wenn φ und $\frac{d\varphi}{dx}$ positiv sind, treten im unteren Theile Zugspannungen σ_t auf und die Resultirende solcher Zugspannungen in beiden Meridianschnitten hat in der Symmetrieebene des Plattenelementes den Pfeil nach der Plattenmitte hin gerichtet, wie er in Abb. 55 eingetragen ist. Oben, d. h. bei negativem z , kehren sich die Richtungen um und das aus den Spannungen σ_t resultirenden Kräftepaar sucht das Plattenelement entgegengesetzt dem Uhrzeigersinne zu drehen. Daher ist der in Gl. (151) festgestellte Werth des Moments später mit negativem Vorzeichen in die Momentengleichung einzuführen.

Jetzt komme ich zu den Spannungen σ_r . In der Schnittfläche, die zum Radius x gehört, bilden die Spannungen σ_r ein Kräftepaar, dessen Moment sich mit Rücksicht auf Gl. (150) zu

$$\int \sigma_r dF z = \frac{mE}{m^2-1} \left(m \frac{d\varphi}{dx} + \frac{\varphi}{x} \right) \int z^2 dF$$

berechnet. Das Integral ist das Trägheitsmoment eines Rechtecks von der Breite $x d\alpha$ und der Höhe h ; der vorige Ausdruck geht daher über in

$$\frac{mE}{m^2-1} \cdot \frac{h^3}{12} \left(mx \frac{d\varphi}{dx} + \varphi \right) d\alpha.$$

Dazu kommt das Kräftepaar der Spannungen σ_r an der gegenüber liegenden Schnittfläche, das den entgegengesetzten Drehsinn hat. Es kommt also nur auf den Unterschied zwischen beiden Momenten an. Dieser Unterschied ist das Differential des vorausgehenden Ausdrucks, das einem Anwachsen des Ab-

standes x um dx entspricht. Durch Ausführung der Differentiation finden wir

$$\text{Mom. aller } \sigma_r = \frac{mE}{m^2 - 1} \cdot \frac{h^3}{12} \left(mx \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + m \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dx} \right) dx d\alpha. \quad (152)$$

In Bezug auf das Vorzeichen ist zu bemerken, dass bei positivem φ und $\frac{d\varphi}{dx}$ die Spannungen σ_r in der unteren Hälfte Zugspannungen sind und dass das Kräftepaar im Schnitte x daher entgegengesetzt dem Uhrzeigersinne dreht. Im Schnitte $x + dx$ dreht es also im Uhrzeigersinne. Wenn das vorher berechnete Differential positiv ist, gibt es demnach ein im positiven Sinne drehendes Moment an, d. h. Mom. aller σ_r ist ohne Vorzeichenwechsel in die Momentengleichung einzuführen.

Endlich führen auch noch die Schubspannungen zu einem Kräftepaare, dessen Moment berechnet werden muss. Hier müssen wir nun eine nähere Bestimmung darüber treffen, für welche Belastung die Rechnung weiter durchgeführt werden soll, während alle vorausgehenden Betrachtungen bei jeder symmetrisch vertheilten Belastung in Gültigkeit bleiben. Wir wollen jetzt annehmen, dass die Belastung in einem gleichförmig über die Fläche der Platte vertheilten Drucke p auf die Flächeneinheit bestehe. Dieser Fall liegt z. B. vor, wenn ein Cylinderdeckel einem Flüssigkeitsdrucke ausgesetzt ist. — Zur Berechnung der übertragenen Scheerkraft denken wir uns einen ringförmigen Schnitt mit dem Halbmesser x geführt. Der dadurch nach Innen hin abgegrenzte Theil der Platte trägt dann eine Belastung von der Grösse

$$\pi x^2 p$$

und ihr muss durch die Scheerkräfte im Ringschnitte das Gleichgewicht gehalten werden. Auf den zwischen die beiden Meridianschnitte mit dem Centriwinkel $d\alpha$ fallenden Theil des Ringschnittes kommt davon der Bruchtheil $\frac{d\alpha}{2\pi}$, so dass also an dem Plattenelemente im Schnitte x die Scheerkraft

$$\frac{x^2 p}{2} d\alpha$$

übertragen wird. Im Schnitte $x + dx$ ist die übertragene Scheerkraft um ein Differential grösser, so dass der Unterschied der auf das Plattenelement selbst kommenden Belastung entspricht. Bei Feststellung des Momentes kommt es aber auf diesen von höherer Ordnung unendlich kleinen Unterschied nicht an und wir haben

$$\text{Mom. der } \tau = \frac{x^2 p}{2} d\alpha dx. \quad (153)$$

Das Vorzeichen dieses Momentes ist, wie schon ein Blick auf Abb. 55 lehrt, positiv.

Das Gleichgewicht des Plattenelementes gegen Drehung erfordert, dass die algebraische Summe aller dieser Momente gleich Null ist, also

$$\text{Mom. der } \sigma_t + \text{Mom. aller } \sigma_r + \text{Mom. der } \tau = 0,$$

oder wenn wir die dafür berechneten Werthe einführen und zugleich auf die Bemerkungen über die Vorzeichen achten,

$$-\frac{mE}{m^2-1} \cdot \frac{h^3}{12} \left(m \frac{\varphi}{x} + \frac{d\varphi}{dx} \right) + \frac{mE}{m^2-1} \cdot \frac{h^3}{12} \left(mx \frac{d^2\varphi}{dx^2} + m \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dx} \right) + \frac{px^2}{2} = 0.$$

Die gemeinsamen Faktoren $d\alpha$ und dx sind hier schon fortgehoben. Die Gleichung vereinfacht sich weiter zu

$$\frac{m^2 E}{m^2-1} \frac{h^3}{12} \left(x \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d\varphi}{dx} - \frac{\varphi}{x} \right) + \frac{px^2}{2} = 0.$$

Zur Abkürzung beim Anschreiben der folgenden Formeln setzen wir

$$N = \frac{6(m^2-1)}{m^2 E h^3} p, \quad (154)$$

so dass also N einen constanten Werth bezeichnet, der als gegeben zu betrachten ist. Die vorige Gleichung geht dann über in

$$x^2 \frac{d^2\varphi}{dx^2} + x \frac{d\varphi}{dx} - \varphi + Nx^3 = 0. \quad (155)$$

Man kennt die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung; sie lautet

$$\varphi = -\frac{N}{8} x^3 + Bx + \frac{C}{x}, \quad (156)$$

worin B und C die beiden willkürlichen Integrationsconstanten sind. Durch Einsetzen des angegebenen Ausdrucks in Gl. (155) überzeugt man sich leicht, dass er diese Gleichung befriedigt, und dass er die allgemeinste Lösung bildet, folgt daraus, dass er zwei unbestimmte Constanten umfasst.

Zur Bestimmung der Integrationsconstanten aus den Grenzbedingungen dient zunächst die Bemerkung, dass φ für $x = 0$ verschwinden muss. Daher ist $C = 0$ zu setzen. Die Constante B hängt von der Bedingung ab, der die Platte am Rande unterworfen ist. Wir wollen zunächst annehmen, dass die Platte eingespannt sei, dass also die elastische Fläche längs des Kreises $x = r$ von der horizontalen Ebene, mit der die Mittelebene ursprünglich zusammenfiel, berührt wird. Dann muss φ auch für $x = r$ verschwinden und aus

$$0 = -\frac{N}{8}r^3 + Br$$

folgt $B = \frac{N}{8}r^2$. Wir kennen jetzt φ vollständig, nämlich

$$\varphi = \frac{N}{8}(r^2x - x^3) = \frac{3(m^2 - 1)}{4m^2Eh^3}p(r^2x - x^3). \quad (157)$$

Nach den Gl. (147) und (148) findet man hiermit auch die elastischen Dehnungen und damit die Beanspruchung des Materials. Durch Einsetzen erhält man

$$\varepsilon_t = \frac{N}{8}(r^2 - x^2)z; \quad \varepsilon_r = \frac{N}{8}(r^2 - 3x^2)z. \quad (158)$$

In der Mitte der Platte, also für $x = 0$, werden ε_r und ε_t einander gleich und zwar gleich $\frac{N}{8}r^2z$. Dies war auch von vornherein zu erwarten, denn dieselbe Dehnung, die für einen Meridianschnitt als ε_t zu bezeichnen ist, d. h. die zu dieser Meridianebene senkrecht steht, gilt hier für einen anderen Meridianschnitt, der in der Richtung der Dehnung gelegt ist, als ε_r . Nach aussen zu (bei wachsendem x) nehmen sowohl ε_t als ε_r ab; am Rande wird ε_t zu Null und $\varepsilon_r = -\frac{N}{4}r^2z$, also dem Absolutbetrage nach doppelt so gross als in der Mitte. Am Rande tritt also die grösste Beanspruchung des Materials auf;

man hat zu erwarten, dass der Bruch der Platte durch die Bildung eines ringförmigen Risses längs des Auflagers eingeleitet wird. Die reducirte Spannung, die als Maass für die Beanspruchung des Materials zu betrachten ist,*) erhält man aus ε_r , nachdem darin $x = r$ und $z = \frac{h}{2}$ gesetzt ist, durch Multiplication mit dem Elasticitätsmodul E , also

$$\sigma_{\text{red}} = E \frac{Nr^2}{4} \cdot \frac{h}{2} = \frac{3(m^2 - 1)}{4m^2} \cdot \frac{r^2}{h^2} p = 0,68p \frac{r^2}{h^2} \text{ für } m = \frac{10}{3}. \quad (159)$$

Die Spannungen σ_t und σ_r kann man nach den Gl. (149) oder (150) ebenfalls sofort anschreiben, nachdem φ , bezw. die Dehnungen ε_t und ε_r ermittelt sind. Es hat aber kaum einen Zweck, da die ganze Untersuchung nur auf die Ermittlung der Beanspruchung des Materials hinausläuft und diese durch σ_{red} schon angegeben wird.

Nur die Frage nach der Gestalt der elastischen Fläche bleibt jetzt noch zu beantworten. Dazu bemerke ich, dass φ zugleich den Neigungswinkel angibt, den die Tangente an die Meridianlinie der elastischen Fläche mit der Richtung der X-Axe bildet. Mit Rücksicht auf die aus Abb. 54 einzusehenden Festsetzungen über die positiven Richtungen hat man daher

$$\frac{dy}{dx} = -\text{tg } \varphi.$$

Da der Winkel φ klein ist, kann an Stelle der Tangente auch der Winkel selbst gesetzt werden; mit Rücksicht auf Gl. (157) hat man daher

$$\frac{dy}{dx} = \frac{N}{8} (r^3 - r^2 x). \quad (160)$$

Durch Integration erhält man daraus

$$y = \frac{N}{8} \left(\frac{x^4}{4} - r^2 \frac{x^2}{2} \right) + C$$

und die Integrationsconstante C bestimmt sich aus der Bedingung, dass für $x = r$ die Einsenkung y zu Null werden muss. Dies liefert

$$C = \frac{Nr^4}{32}$$

*) Vgl. hierzu die Anmerkung am Schlusse von § 44.

und daher schliesslich

$$y = \frac{N}{32}(x^4 - 2r^2x^2 + r^4) = \frac{N}{32}(x^2 - r^2)^2 \quad (161)$$

Von besonderem Interesse ist die Einsenkung, die die Platte in der Mitte erfährt, also die Ordinate y für $x = 0$. Wir wollen sie, wie früher beim Balken, den Biegungspfeil f nennen und erhalten

$$f = \frac{Nr^4}{32}.$$

Nach Einsetzen des Werthes von N aus Gl. (154) und mit $m = \frac{10}{3}$ geht dies über in

$$f = \frac{3(m^2 - 1)}{16m^2Eh^3}Pr^4 = 0,17 \frac{Pr^4}{Eh^3}. \quad (162)$$

§ 43. Fortsetzung für den Fall einer Einzellast P in der Mitte.

Die Entwicklungen des vorigen Paragraphen bleiben gültig bis nach Gl. (152). Die Scheerkraft, die in einem ringförmigen Schnitte übertragen wird, ist aber hier gleich P und auf den zu dem Plattenelemente gehörigen Theil dieses Schnittes kommt davon $P \frac{d\alpha}{2\pi}$. Für das Moment des aus den Scheerspannungen gebildeten Kräftepaars hat man daher

$$\text{Mom. der } \tau = \frac{P}{2\pi}d\alpha dx \quad (163)$$

an Stelle von Gl. (153). Die Momentengleichung, die die Bedingung für das Gleichgewicht des Plattenelementes gegen Drehen ausspricht, lautet daher hier

$$-\frac{mE}{m^2 - 1} \cdot \frac{h^3}{12} \left(m \frac{\varphi}{x} + \frac{d\varphi}{dx} \right) + \frac{mE}{m^2 - 1} \cdot \frac{h^3}{12} \left(mx \frac{d^2\varphi}{dx^2} + m \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dx} \right) + \frac{P}{2\pi} = 0,$$

woraus man, wie früher, nach Einführung der abkürzenden Bezeichnung

$$Q = \frac{6(m^2 - 1)P}{\pi m^2 E h^3} \quad (164)$$

für φ die Differentialgleichung zweiter Ordnung