



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

Aufgaben 32 - 34.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-84594](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-84594)

Aufgaben.

32. Aufgabe. Eine Schiene, die hinreichend lang ist, um sie als unendlich lang betrachten zu können, ist ihrer ganzen Länge nach satt auf den Erdboden aufgelegt und wird in der Mitte durch eine Einzellast P belastet. Nach welchem Gesetze vertheilt sich der Druck auf den Boden?

Lösung. Wir legen hier besser das Coordinatensystem so, dass die Abscissen x von der belasteten Stelle aus nach rechts hin zählen. Dadurch wird an der Gültigkeit der Gl. (135) und (136) und der daraus folgenden nichts geändert. Folglich bleibt auch Gl. (140) unmittelbar anwendbar und es handelt sich nur noch um die Bestimmung der Integrationsconstanten aus den Grenzbedingungen. Für $x = \infty$ muss y verschwinden, daher müssen die Constanten C_1 und C_2 hier gleich Null gesetzt werden. Für $x = 0$ wird ferner der Symmetrie wegen $\frac{dy}{dx} = 0$ und daraus folgt $C_3 = C_4$. Zunächst bleibt also als Gleichung der Curve

$$y = C_3 e^{-\alpha x} (\cos \alpha x + \sin \alpha x)$$

und für die Druckvertheilung hat man nach Gl. (138)

$$p = k C_3 e^{-\alpha x} (\cos \alpha x + \sin \alpha x).$$

Das Gesetz, nach dem sich der Druck der Länge nach vertheilt, ist hiermit schon gegeben. Man erkennt zunächst, dass p auch negativ wird, nämlich sobald x bis über den Werth

$$x = \frac{3\pi}{4\alpha}$$

angewachsen ist und weiterhin wieder. An der Stelle $x = \frac{3\pi}{4\alpha}$ ist der Faktor $e^{-\alpha x}$ auf 0,094 des Werthes 1 an der Stelle $x = 0$ gesunken und er nimmt dann weiterhin schnell ab. Wir wollen annehmen, dass das Gewicht der Schiene hinreichte, um an den Stellen, wo p nach der Formel negativ wird, ein Abheben der Schiene von dem Boden zu verhindern oder auch, dass die Schiene an dem Boden befestigt ist. Wir können dann die vorher abgeleitete Gleichung überall als gültig betrachten. Der unbekannt constant Faktor $k C_3$, der noch darin vorkommt, hat die Bedeutung des Druckes p_0 an der Stelle $x = 0$. Um diesen zu ermitteln, beachten wir, dass

$$\int_0^{\infty} p dx = \frac{P}{2}$$

sein muss. Die andere Hälfte der Last P kommt nämlich auf die nach links gelegene Schienenhälfte. Setzt man p in diese Gleichung ein und integriert, so wird

$$\int_0^{\infty} p dx = p_0 \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} (\cos \alpha x + \sin \alpha x) dx = p_0 \left[-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} \cos \alpha x \right]_0^{\infty} = \frac{P_0}{\alpha}.$$

Demnach wird

$$p_0 = \frac{\alpha P}{2},$$

während α durch Gl. (141) bestimmt ist. Damit kennt man den Druck an jeder Stelle, vorausgesetzt, dass die Bettungsziffer k , das Trägheitsmoment des Schienenquerschnitts, der Elastizitätsmodul E und die Last P gegeben sind.

33. Aufgabe. Eine Stange aus Flusseisen von 80 cm Länge und quadratischem Querschnitte von 6 cm Seite liegt satt auf dem Erdboden auf und trägt in der Mitte eine Last von 1000 kg. Wie gross ist der Druck, den die Stange in der Mitte und an den Enden auf den Erdboden ausübt und wie gross ist die Beanspruchung des Eisens, wenn der Boden unter einer spezifischen Belastung von 1 kg pro 1 qcm eine elastische Einsenkung von 0,25 mm erfährt?

Lösung. Für den linken Ast der elastischen Linie benutzen wir wieder Gl. (140); den Ursprung des Coordinatensystems lassen wir mit dem linken Ende der Stange zusammenfallen. Wir können dann ohne Weiteres die in den Gl. (142) und (143) ausgesprochenen Grenzbedingungen benutzen. Dazu kommt, dass für $x = a = 40$ cm der Symmetrie wegen $\frac{dy}{dx} = 0$ sein muss. Dies liefert die Bedingungsgleichung

$$C_1(m_1 - m_2) + C_2(m_1 + m_2) - C_3(m_3 + m_4) + C_4(m_3 - m_4) = 0.$$

Hiermit lassen sich die übrigen Constanten C in einer davon ausdrücken. Um dies auch numerisch sofort ausführen zu können, berechnen wir zunächst α nach Gl. (141). Man hat hier

$$\Theta = \frac{bh^3}{12} = \frac{6^4}{12} = 108 \text{ cm}^4$$

und für Flusseisen setzen wir $E = 22 \cdot 10^5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$. Die Constante k ist durch Gl. (138) eingeführt; ihre Dimension ist hiernach die einer spezifischen Spannung. Denken wir uns auf 1 cm Länge der Stange einen spezifischen Druck von 1 kg/cm² übertragen, so

wird $p = \frac{6 \text{ kg}}{\text{cm}}$ und die zugehörige Einsenkung y nach den Angaben der Aufgabe gleich 0,25 mm, daher ist $k = \frac{p}{y} = 240 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$. Für α hat man daher

$$\alpha = \sqrt{\frac{240 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}}{4 \cdot 22 \cdot 10^5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \cdot 108 \text{ cm}^4}} = 0,0224 \cdot \text{cm}^{-1}.$$

Für αa ergibt sich hieraus $\alpha a = 0,896$, ferner

$$e^{\alpha a} = 2,450, \quad e^{-\alpha a} = 0,408, \quad \cos \alpha a = 0,625, \quad \sin \alpha a = 0,781$$

und daher auch

$$m_1 = 1,530, \quad m_2 = 1,912, \quad m_3 = 0,255, \quad m_4 = 0,319.$$

Die Gleichungen zwischen den Constanten C lauten also jetzt

$$\begin{aligned} C_2 &= C_4; & C_1 &= C_3 + 2C_4; \\ -0,382 C_1 + 3,442 C_2 - 0,574 C_3 - 0,064 C_4 &= 0, \end{aligned}$$

aus denen folgt:

$$C_1 = 4,73 C_4; \quad C_2 = C_4; \quad C_3 = 2,73 C_4.$$

Die Gleichung der elastischen Linie schreibt sich daher jetzt

$$y = C_4 \{ 4,73 e^{\alpha x} \cos \alpha x + e^{\alpha x} \sin \alpha x + 2,73 e^{-\alpha x} \cos \alpha x + e^{-\alpha x} \sin \alpha x \}$$

und für den auf die Längeneinheit bezogenen Druck p hat man

$$p = k C_4 \{ 4,73 e^{\alpha x} \cos \alpha x + e^{\alpha x} \sin \alpha x + 2,73 e^{-\alpha x} \cos \alpha x + e^{-\alpha x} \sin \alpha x \}.$$

Die Bedeutung des constanten Faktors $k C_4$ vor der Klammer folgt daraus sofort: für $x = 0$ nimmt der Ausdruck in der Klammer den Werth 7,46 an, man hat also

$$k C_4 = \frac{p_0}{7,46}.$$

Für $x = a$, also für die Mitte des Stabs, sei der Druck p mit p_a bezeichnet. Die Formel liefert dafür

$$p_a = \frac{p_0}{7,46} \{ 4,73 m_1 + m_2 + 2,73 m_3 + m_4 \}$$

oder nach Einsetzen der für m gefundenen Werthe

$$p_a = 1,36 p_0.$$

Damit ist zunächst ermittelt, in welchem Verhältnisse der Druck p von der Mitte aus nach den Enden des Stabes hin abnimmt. Um die absoluten Beträge zu finden, machen wir, wie bei der vorigen Aufgabe von der Bedingung Gebrauch, dass die Summe aller Druckkräfte auf den Erdboden gleich der Last von 1000 kg sein muss. Dazu wäre es vollständig ausreichend, das Druckverteilungsgesetz weiterhin durch ein anderes, etwa durch ein parabolisches zu ersetzen, das mit dem gefundenen in dem Verhältnisse $\frac{p_a}{p_0}$ übereinstimmt, da es sich ja nur um eine Näherungsrechnung handelt. Es steht aber auch nichts im Wege, die Integrationen an dem Ausdrucke für p unmittelbar auszuführen. Man findet

$$\begin{aligned} \alpha \int_0^a e^{\alpha x} \cos \alpha x dx &= 1,222; & \alpha \int_0^a e^{\alpha x} \sin \alpha x dx &= 0,691; \\ \alpha \int_0^a e^{-\alpha x} \cos \alpha x dx &= 0,532^*); & \alpha \int_0^a e^{-\alpha x} \sin \alpha x dx &= 0,213. \end{aligned}$$

Hiermit wird aber

$$\int_0^a p dx = \frac{p_0}{7,46} \cdot \frac{4,73 \cdot 1,222 + 0,691 + 2,73 \cdot 0,532 + 0,213}{0,0224} = 48,7 p_0.$$

Als Längeneinheit gilt hier 1 cm, denn α ist in dieser Einheit ausgedrückt. Das Doppelte des berechneten Integrals ist gleich 1000 kg, daraus folgt

$$p_0 = \frac{1000}{97,4} = 10,3 \frac{\text{kg}}{\text{cm}} \quad \text{und} \quad p_a = 14,0 \frac{\text{kg}}{\text{cm}}.$$

Hätte man das parabolische Vertheilungsgesetz angenommen, also

$$p = p_0 + \frac{p_a - p_0}{a^2} (2ax - x^2)$$

gesetzt, so hätte sich ergeben

*) An dieser Stelle ist ein Fehler in der Zahlenrechnung verbessert, auf den mich einer meiner Hörer, Herr R. Düll, freundlichst aufmerksam gemacht hat.

$$\int_0^a p dx = \frac{p_0 + 2p_a}{3} \cdot a = 49,6 p_0,$$

also nicht viel mehr wie bei der genaueren Rechnung. Wir wollen daher das parabolische Vertheilungsgesetz bei der Berechnung des Bieugungsmoments M_a in der Mitte zu Grunde legen. Man findet dann

$$M_a = \int_0^{\frac{a}{2}} (a - x) p dx = \frac{p_0 + 2p_a}{3} a^2 - \frac{5p_a + p_0}{12} a^2 = \frac{p_a + p_0}{4} a^2$$

oder nach Einsetzen der Zahlenwerthe

$$M_a = 9560 \text{ cm kg}$$

und hiermit die Beanspruchung des Materials

$$\sigma = \frac{6 M_a}{b h^2} = \frac{6 \cdot 9560}{6^3} = 266 \text{ atm.}$$

Uebrigens hätte M_a ohne Schwierigkeit auch mit Hülfe der Beziehung

$$M_a = - E \Theta \left[\frac{d^2 y}{dx^2} \right]_{x=a}$$

ermittelt werden können.

34. Aufgabe. Ein Stab von der Länge $2a$ liegt satt auf dem Boden auf und wird in der Mitte mit P belastet. Der Querschnitt ist ein Rechteck von überall gleicher Breite, dessen Höhe aber nach der Mitte zu in solcher Art anwachsen soll, dass das Trägheitsmoment überall proportional dem Bieugungsmomente M ist. Man soll das Gesetz der Druckvertheilung ermitteln und angeben, wie die Querschnittshöhe nach der Mitte hin anwachsen muss, damit die Bedingung der Aufgabe erfüllt wird.

Lösung. Die Gleichung der elastischen Linie lässt sich hier in der Form

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{M}{E \Theta} = - c$$

anschreiben, in der c eine Constante ist, die unbestimmt bleiben muss, weil keine Angabe über den Proportionalitätsfaktor von M und Θ gemacht ist. Durch Integration folgt

$$y = - c \frac{x^2}{2} + K_1 x + K_2.$$

Für $x = a$ muss $\frac{dy}{dx} = 0$ sein und daraus folgt $K_1 = ca$. Man findet also

$$p = ky = kK_2 + \frac{ck}{2}(2ax - x^2).$$

Das Druckverteilungsgesetz ist also hier genau parabolisch; für den Druck am Ende und in der Mitte hat man

$$p_0 = kK_2; \quad p_a = kK_2 + \frac{cka^2}{2}$$

und daher auch

$$p = p_0 + \frac{p_a - p_0}{a^2}(2ax - x^2),$$

wie bei der vorigen Aufgabe; daher ist auch wie dort

$$\frac{p_0 + 2p_a}{2}a = \frac{P}{2}$$

und hieraus folgt

$$p_0 = \frac{P}{2a} - \frac{cka^2}{3}; \quad K_2 = \frac{P}{2ak} - \frac{ca^2}{3}.$$

Wenn c und k gegeben sind, kennt man hiermit die genaue Gestalt der elastischen Linie. Für das Biegemoment im Abstände x vom Ende folgt:

$$M = \int_0^x (x-u)p \, du = \frac{p_0 x^2}{2} + (p_a - p_0) \frac{4ax^3 - x^4}{12a^2}$$

und hieraus Θ mit Hülfe der Beziehung $\Theta = \frac{M}{Ec}$. Mit Θ ist auch die Höhe des Querschnitts als Function von x bestimmt.