



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

§. 39. Die Eisenbahnquerschwellen mit constantem Querschnitte.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-84594](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-84594)

erster Linie von den in der nächsten Nachbarschaft übertragenen Druckkräften abhängen und nur wenig von den weiter entfernten beeinflusst sein. Es ist daher vollständig gerechtfertigt, wenn man zunächst nur einmal jenen Umstand in Betracht zieht, der der ausschlaggebende zu sein scheint, und die sich daraus ergebenden Folgerungen ableitet. Wünschenswerth ist nachher freilich die Prüfung der Uebereinstimmung dieser Folgerungen mit der Wirklichkeit durch einen unmittelbaren Versuch. Zimmermann hat solche Versuche vornehmen lassen; leider sind diese aber bisher vereinzelt geblieben, während bei der Wichtigkeit der Sache ergänzende Versuche recht nöthig wären.

§ 39. Die Eisenbahnquerschwele mit constantem Querschnitte.

Der auf die Längeneinheit von der Schwelle auf die Bettung übertragene Druck sei mit p , der Druck für das Längenelement dx der Schwelle also mit $p dx$ bezeichnet. Für einen Querschnitt im Ab-

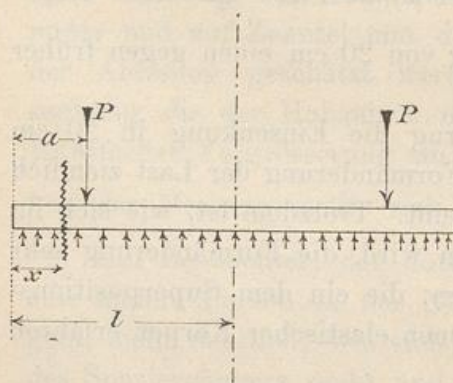


Abb. 52.

stande x vom linken Ende der Schwelle hat man, falls x kleiner als a ist, für die Sheerkraft V und das Biegemoment M die Ausdrücke

$$V = \int_0^x p dx; \quad M = \int_0^x p du (x - u),$$

wenn u hier ebenfalls eine Abscisse ist, die man von 0 bis x wachsen lässt. Die Benutzung dieser Integrale ist aber un bequem und es ist daher besser, die Differentialquotienten von V und M nach x in der unbekanntenen Function p , auf deren Ermittlung es ankommt, auszudrücken. Man hat zunächst $dV = p dx$, ein Ansatz, der unmittelbar aus der Bedeutung von p hervorgeht, und hiermit

$$\frac{dV}{dx} = p. \quad (135)$$

Schon früher fanden wir, dass die Scheerkraft V als Differentialquotient des Biegemoments M angesehen werden kann (Gl. 72) und wir finden daher auch

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = p. \quad (136)$$

Dieselben Ausdrücke hätten sich auch durch Differentiation der vorher für V und M aufgestellten Formeln ableiten lassen; sie sind aber allgemeiner als jene, denn sie gelten nicht nur für den ersten, von 0 bis a reichenden Abschnitt der Schwelle, sondern, wie aus ihrer Ableitung hervorgeht, auch für die folgenden. Die Biegemomente bedingen, dass sich die Mittellinie des Stabes krümmt. Bezeichnen wir die Einsenkung, die ein Punkt der Mittellinie mit der Abscisse x erfährt, mit y , so ist $y = f(x)$ die Gleichung der elastischen Linie des Stabs. Die Einsenkungen y sind also einerseits an den Zusammenhang mit den Biegemomenten gebunden, der durch die Differentialgleichung der elastischen Linie ausgesprochen wird und andererseits sind sie nach unserer grundlegenden Annahme der unbekanntem Function p direct proportional. Der Vergleich beider Beziehungen miteinander führt zur Lösung der Aufgabe.

Die Differentialgleichung der elastischen Linie (Gl. 78)

$$E \Theta \frac{d^2 y}{dx^2} = - M$$

liefert, wenn man sie zweimal nach x differentiirt, mit Rücksicht auf Gl. (136)

$$E \Theta \frac{d^4 y}{dx^4} = - p. \quad (137)$$

Die von uns gewählte Annahme über den Zusammenhang zwischen der elastischen Einsenkung y und dem Drucke p für die Längeneinheit der Schwelle kann in der Gleichung

$$p = ky \quad (138)$$

ausgesprochen werden, in der k eine von den elastischen Eigenschaften der Bettung abhängige Constante ist, die wir als die „Bettungsziffer“ bezeichnen wollen. (Gl. 137) geht damit über in

$$E\Theta \frac{d^4 y}{dx^4} = -ky. \quad (139)$$

Man kennt die allgemeine, also mit vier willkürlichen Constanten behaftete, Lösung dieser Differentialgleichung vierter Ordnung. Sie lautet:

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \alpha x + C_2 e^{\alpha x} \sin \alpha x + C_3 e^{-\alpha x} \cos \alpha x + C_4 e^{-\alpha x} \sin \alpha x, \quad (140)$$

worin die C die willkürlichen Constanten sind, während mit α zur Abkürzung der Absolutbetrag von

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{4E\Theta}} \quad (141)$$

bezeichnet ist. Dass die Lösung die Differentialgleichung (139) befriedigt, erkennt man durch Einsetzen in diese Gleichung, und dass sie zugleich die allgemeinste Lösung ist, folgt daraus, dass sie vier unbestimmte Constanten enthält.

Es bleibt uns jetzt nur noch übrig, die Constanten mit Hilfe der Grenzbedingungen, die bei der Aufgabe vorgeschrieben sind, zu bestimmen. Dabei ist zu beachten, dass die ganze elastische Linie der Schwelle in drei gesonderte Aeste zerfällt, von denen der erste von 0 bis a reicht, der zweite zwischen die beiden Schienen fällt und der dritte das über die rechte Schiene hinausragende Stück der Schwelle umfasst. Der Symmetrie wegen genügt es indessen, wenn wir hier nur den ersten Ast und die bis zur Symmetrieaxe reichende Hälfte des zweiten Astes in's Auge fassen.

Für alle Aeste gilt im Allgemeinen die Lösung (140); die Constanten C sind aber den verschiedenen Anfangsbedingungen entsprechend bei den einzelnen Aesten verschieden. Wir haben also hier im Ganzen acht bisher unbestimmt gebliebene Constanten den Grenzbedingungen entsprechend zu wählen. Dazu stehen uns auch in der That acht Bedingungsgleichungen zur Verfügung. Zunächst wissen wir, dass für $x = 0$ sowohl M als V verschwinden. Mit M ist aber überall $\frac{d^2 y}{dx^2}$ und mit V ist $\frac{d^3 y}{dx^3}$ proportional; beide Differentialquotienten sind also für

$x = 0$ gleich Null zu setzen. Der besseren Uebersicht wegen stelle ich hier die drei ersten Differentialquotienten von y nach Gl. (140) zusammen. Man findet:

$$\frac{dy}{dx} = \alpha \{ C_1(e^{\alpha x} \cos \alpha x - e^{\alpha x} \sin \alpha x) + C_2(e^{\alpha x} \sin \alpha x + e^{\alpha x} \cos \alpha x) \\ + C_3(-e^{-\alpha x} \cos \alpha x - e^{-\alpha x} \sin \alpha x) \\ + C_4(-e^{-\alpha x} \sin \alpha x + e^{-\alpha x} \cos \alpha x) \},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \alpha^2 \{ -2C_1 e^{\alpha x} \sin \alpha x + 2C_2 e^{\alpha x} \cos \alpha x + 2C_3 e^{-\alpha x} \sin \alpha x \\ - 2C_4 e^{-\alpha x} \cos \alpha x \},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \alpha^3 \{ -2C_1(e^{\alpha x} \sin \alpha x + e^{\alpha x} \cos \alpha x) \\ + 2C_2(e^{\alpha x} \cos \alpha x - e^{\alpha x} \sin \alpha x) \\ + 2C_3(-e^{-\alpha x} \sin \alpha x + e^{-\alpha x} \cos \alpha x) \\ + 2C_4(e^{-\alpha x} \cos \alpha x + e^{-\alpha x} \sin \alpha x) \}.$$

Die Bedingung, dass $\frac{d^2y}{dx^2}$ für $x = 0$ verschwinden soll, liefert daher die Gleichung

$$C_4 = C_2 \quad (142)$$

und aus $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$ für $x = 0$ folgt

$$C_1 = C_2 + C_3 + C_4. \quad (143)$$

Zur Abkürzung führen wir ferner die Bezeichnungen ein

$$e^{\alpha a} \cos \alpha a = m_1; \quad e^{\alpha a} \sin \alpha a = m_2; \quad e^{-\alpha a} \cos \alpha a = m_3; \\ e^{-\alpha a} \sin \alpha a = m_4$$

und die vier Constanten, die in der Gleichung des zweiten Astes der elastischen Linie auftreten, werden der Reihe nach C_5 bis C_8 geschrieben. Nun müssen sich beide Aeste so aneinander schliessen, dass sie für $x = a$ gleiches y und auch gleiches $\frac{dy}{dx}$ geben, denn ein Knick der elastischen Linie kann an dieser Stelle nicht auftreten. Aber auch $\frac{d^2y}{dx^2}$ muss an der Anschlussstelle für beide Aeste gleich sein, da sich das Biegemoment M nicht sprungweise ändert. Damit erhalten wir die drei Bedingungsbedingungen:

$$\left. \begin{aligned}
 C_1 m_1 + C_2 m_2 + C_3 m_3 + C_4 m_4 &= C_5 m_1 + C_6 m_2 + C_7 m_3 \\
 &+ C_8 m_4, \\
 C_1 (m_1 - m_2) + C_2 (m_1 + m_2) - C_3 (m_3 + m_4) \\
 &+ C_4 (m_3 - m_4) = C_5 (m_1 - m_2) + C_6 (m_1 + m_2) \\
 &- C_7 (m_3 + m_4) + C_8 (m_3 - m_4), \\
 - C_1 m_2 + C_2 m_1 + C_3 m_4 - C_4 m_3 &= - C_5 m_2 \\
 &+ C_6 m_1 + C_7 m_4 - C_8 m_3.
 \end{aligned} \right\} (144)$$

Der dritte Differentialquotient von y ist dagegen an der Anschlussstelle für beide Aeste von verschiedener Grösse, denn man hat

$$V = \frac{dM}{dx} = - E\Theta \frac{d^3 y}{dx^3}$$

und die Scheerkraft V erleidet an der Uebergangsstelle eine plötzliche Aenderung um den Betrag $-P$. Wenn man also für den Augenblick die Ordinate des ersten Astes mit y_I , die des zweiten mit y_{II} bezeichnet, so besteht an der Uebergangsstelle die Beziehung

$$\left[\frac{d^3 y_{II}}{dx^3} - \frac{d^3 y_I}{dx^3} \right]_{x=a} = \frac{P}{E\Theta}$$

oder, wenn man die Werthe der Differentialquotienten einsetzt,

$$(C_1 - C_5)(m_1 + m_2) + (C_6 - C_2)(m_1 - m_2) + (C_7 - C_3)(m_3 - m_4) + (C_8 - C_4)(m_3 + m_4) = \frac{P}{2 \alpha^3 E\Theta}. \quad (145)$$

Endlich seien die Werthe, die man erhält, wenn man in den Ausdrücken für m_1, m_2, \dots die Abscisse a durch die Abscisse l (entsprechend der Schwellenmitte) ersetzt, mit n_1, n_2 u. s. f. bezeichnet. In der Symmetrieaxe muss zunächst $\frac{dy}{dx} = 0$ werden, ferner aber auch $\frac{d^3 y}{dx^3}$, weil hier $V = 0$ ist. Man hat also noch die beiden Gleichungen

$$\left. \begin{aligned}
 C_5(n_1 - n_2) + C_6(n_1 + n_2) - C_7(n_3 + n_4) + C_8(n_3 - n_4) &= 0 \\
 - C_5(n_1 + n_2) + C_6(n_1 - n_2) + C_7(n_3 - n_4) + C_8(n_3 + n_4) &= 0
 \end{aligned} \right\} (146)$$

Alle in den acht Bedingungsgleichungen (142) bis (146) vorkommenden Grössen sind bis auf die Unbekannten C in

einem concreten Falle numerisch gegebene Werthe; man kann daher diese Gleichungen ersten Grades ohne Weiteres nach den acht Unbekannten auflösen und kennt dann nach Gl. (140) die Gestalt der beiden Aeste der elastischen Linie. Auch das Gesetz der Druckvertheilung ist damit nach Gl. (138) gegeben.

Wenn man eine solche Untersuchung zu praktischen Zwecken durchführt, wird man die Mühe, acht Gleichungen ersten Grades nach den Unbekannten aufzulösen, nicht sonderlich scheuen, denn die Rechnung braucht nur einmal oder nur wenige Male wiederholt zu werden, um einen klaren Ueberblick über das Verhalten der Querschwellen unter verschiedenen Umständen zu verschaffen. Man wird sich also namentlich Rechenschaft darüber geben können, wie lang man die Schwelle zweckmässiger Weise beiderseits über die Schienen vorstehen lassen soll, wie stark sie zu machen ist u. s. f. Da die Querschwellen im Eisenbahnbau ein Constructionselement bildet, das sich so ungemein häufig in derselben Form wiederholt, liegt nichts daran, wenn sich ein Rechner einmal einige Tage damit abmühen muss, sofern man nur irgend einen Vortheil von einer klaren Einsicht in die Kraftvertheilung erhoffen darf. Hier aber noch weiter auf die Frage einzugehen, hätte keinen Zweck, nachdem alle principiellen Schwierigkeiten aus dem Wege geräumt sind, so dass sich der Leser jetzt selbst ohne fernere Anleitung weiter helfen kann. — Einige Ausrechnungen kommen überdies unter den Aufgaben am Ende des Abschnitts vor.

§ 40. Lösung der vorigen Aufgabe auf graphischem Wege.

An Stelle der durch Gl. (137) oder Gl. (139) ausgesprochenen Bedingung, kann man das Gesetz, dem die elastische Linie der Schwelle unterworfen ist, auch geometrisch zum Ausdrucke bringen. Die elastische Linie eines vorher graden Stabes kann nämlich, wie in der graphischen Statik gezeigt wird, als ein zweites Seilpolygon gefunden werden, das zu der gegebenen Belastungsfläche gehört. Die durch jene Differentialgleichungen zum Ausdrucke gebrachte Bedingung kommt dann darauf