Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

§. 37. Berechnung der ebenen Spiralfedern.

urn:nbn:de:hbz:466:1-84594

Gestalt. Wenn man die Mittellinie als eine Ellipse betrachtet, kann man die Berechnung auf ganz ähnliche Art durchführen, wie es im Eingange des Paragraphen für den kreisförmigen Ring gezeigt wurde. Bei der Ausführung der Integration kommt man aber in diesem Falle auf elliptische Integrale. Est ist daher besser, wenn man in solchen Fällen zum Ersatze der Integration durch eine Summirung endlicher Theile, also zu einer mechanischen Quadratur seine Zuflucht nimmt. Abgesehen von der dadurch veranlassten etwas langwierigeren Rechnung macht die Lösung der Aufgabe aber auch in diesem Falle gar keine Schwierigkeiten von grundsätzlicher Art. — Auf eine in dieser Weise durchgeführte Berechnung von Kettengliedern, bei der sowohl die Bernouillische Annahme, als die Annahme des gradlinigen Spannungsvertheilungsgesetzes berücksichtigt ist, habe ich schon in § 31 hingewiesen. Im Zusammenhange hiermit beachte man jedoch auch die Anmerkung auf S. 238.

§ 37. Berechnung der ebenen Spiralfedern.

Wenn die Feder (vgl. Abb. 48) aufgezogen, d. h. wenn die in der Mitte liegende Spindel gedreht wird, während das äussere Ende der Feder festgehalten ist, verbiegt sich jedes Längenelement ds der Mittellinie zu einem kleineren Krümmungshalbmesser. Die ganze Drehung $\Delta\varphi$ der Spindel ist gleich der Summe der elastischen Winkeländerungen $\Delta d\varphi$ der aufeinander folgenden Querschnitte jedes Elementes ds. Zugleich tritt an dem

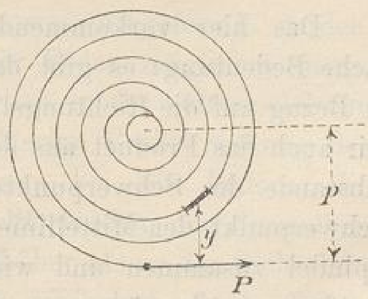

Abb. 48

äusseren Ende eine Kraft P auf, mit der die Feder an der Befestigungsstelle zurückgehalten wird. Die Richtung dieser Kraft P ist senkrecht zu dem nach der Befestigungsstelle von der Mitte aus gezogenen Radiusvector anzunehmen, denn eine in der Richtung dieses Radiusvectors angebrachte äussere

Kraft hätte eine Entfernung ihres Angriffspunktes von der Spindel zur Folge, die hier nicht möglich ist, da beide Federenden in demselben Gestelle unverschieblich gelagert sind.

Für ein Element ds, das den senkrechten Abstand y von der Richtungslinie der Kraft P hat, ist das Biegungsmoment

$$M = Py,$$

denn wenn man die Feder an dieser Stelle durchschneidet, ist P die einzige äussere Kraft, die an dem nach aussen hin gelegenen Theile angreift. Das Vorzeichen von M ist für alle Längenelemente dasselbe. Bei der in der Abbildung angenommenen Richtung von P wäre es eigentlich nach den üblichen Festsetzungen negativ zu nehmen; es genügt aber hier, wenn wir nur mit den Absolutbeträgen rechnen, da ein Zweifel über den Sinn, in dem die auftretenden Formänderungen zu nehmen sind, ganz ausgeschlossen ist. Nach Gl. (112) erhalten wir:

$$\Delta d\varphi = \frac{Py}{E\Theta} ds,$$

und wenn wir dies über die ganze Ausdehnung der Mittellinie integriren und constanten Querschnitt voraussetzen:

$$\Delta\varphi = \frac{P}{E\Theta}\int y ds. \tag{130^a}$$

Das hier vorkommende Integral hat übrigens eine einfache Bedeutung: es gibt das statische Moment der Mittellinie in Bezug auf die Richtungslinie der Kraft P an. Dafür können wir auch das Product aus der Länge l der Mittellinie und dem Abstande des Schwerpunktes setzen. Offenbar fällt nun der Schwerpunkt der Mittellinie ziemlich genau mit der Mitte der Spindel zusammen und wir haben daher auch, wenn p die Entfernung des äusseren Federendes von der Spindelmitte angibt,

$$\Delta\varphi = \frac{Pp}{E\Theta} l. \tag{131}$$

Bei der Anwendung solcher Federn hat man die Absicht, mechanische Energie von einem durch die besonderen Umstände des Falles bedingten Betrage in Gestalt von Formänderungsarbeit aufzuspeichern. Die Berechnung der Formänderungsarbeit A ist daher hier von besonderer Wichtigkeit. Am einfachsten stellt man zu diesem Zwecke fest, wie viel mechanische Arbeit beim Aufziehen der Feder, also bei der Umdrehung der Spindel geleistet wird. Dazu beachte man, dass die an der Spindel angreifenden äusseren Kräfte mit der Kraft P am äusseren Ende ein Gleichgewichtssystem bilden müssen. Die Kräfte an der Spindel lassen sich daher zu einer Einzelkraft P, die durch die Spindelmitte geht, und einem Kräftepaare vom Momente Pp zusammensetzen. Die Einzelkraft wird von der Lagerung der Spindel aufgenommen, das Moment nur dann, wenn eine Hemmung in das auf der Spindel sitzende Sperrrad eingreift. Beim Aufziehen der Feder muss aber ein Kräftepaar M angebracht werden, das die Drehung der Spindel erzwingt. Die Arbeitsleistung eines Kräftepaars bei einer Drehung ist gleich dem Producte aus dem Momente und dem in Bogenmaass ausgedrückten Drehungswinkel. Hier ist noch der Factor $\frac{1}{2}$ beizufügen, weil es auf den Mittelwerth des Momentes während des Aufziehens ankommt. Man hat daher

$$A = \frac{1}{2} M \Delta \varphi = \frac{(Pp)^2}{2 E \Theta} l. \tag{132}$$

Dieser Ausdruck kann noch etwas umgeformt werden. Man sucht nämlich die Leistung der Feder möglichst auszunutzen, d. h. so viel Arbeit als möglich in ihr aufzuspeichern. Die Grenze dafür ist durch die zulässige Beanspruchung des Materials gegeben. Diese wählt man bei den Federn, die meistens aus bestem Stahle hergestellt werden, aus demselben Grunde gewöhnlich sehr hoch, viel höher als es der Sicherheit wegen bei anderen Constructionen zu geschehen pflegt. Jedenfalls darf man aber nicht über die Elasticitätsgrenze oder die damit in der Regel zusammenfallende Proportionalitätsgrenze des Materials gehen. Bezeichnen wir die hiernach als zulässig anzusehende grösste Biegungsspannung mit σ, so ist

$$\sigma = \frac{2 Pp}{\Theta} e,$$

denn das grösste Biegungsmoment tritt in der äussersten Windung diametral gegenüber der Befestigungsstelle auf und der Hebelarm der Kraft P kann dort gleich $2p$ gesetzt werden. Mit Hülfe dieser Gleichung kann das grösste Moment Pp, das an der Spindel angreifen darf, in σ ausgedrückt und dieser Werth in Gl. (132) eingeführt werden. Man findet

$$A = \frac{\sigma^2 \Theta}{8 e^2 E} l. \tag{133}$$

Wenn der Querschnitt der Feder, der hier stets als constant vorausgesetzt wurde, gegeben ist, kann dies noch weiter ausgerechnet werden. Für einen rechteckigen Querschnitt von den Seiten b und h, wird $\Theta = \frac{bh^3}{12}$ und $e = \frac{h}{2}$, also

$$A = \frac{\sigma^2 b h l}{24 E} = \frac{\sigma^2}{24 E} \cdot V. \tag{134}$$

In der letzten Formel bedeutet $V = bhl$ das Volumen der Feder und man erkennt daraus, dass die Formänderungsarbeit nur von dem Volumen, also dem Materialaufwande abhängt und nicht davon, wie sich das Volumen aus den drei Factoren b, h und l zusammensetzt.

Aufgaben.

26. Aufgabe. Der Querschnitt eines gekrümmten Stabes sei ein Rechteck von 2 cm Breite und 4 cm Höhe (diese Seite in der Richtung des Krümmungshalbmessers gemessen) und der Krümmungshalbmesser der Mittellinie sei gleich 5 cm. Um wie viel unterscheidet sich die nach der Bernouilli'schen Annahme berechnete grösste Spannung, die durch ein Biegungsmoment M hervorgerufen wird, von der nach der einfachen Formel $\sigma = \frac{M}{\Theta} y$ gefundenen?

Lösung. Nach Gl. (115) hat man für die Spannung σ nach der Bernouilli'schen Annahme einen Ausdruck von der Form

$$\sigma = c \cdot \frac{y}{r + y},$$

worin jetzt c eine constante (d. h. von y unabhängige) Grösse ist, die wir berechnen werden. Die Abstände y sind von der Nulllinie NN aus gerechnet, deren Lage zunächst ermittelt werden muss. Dafür dient uns die Gleichung

$$\int \sigma dF = 0 \quad \text{oder} \quad \int \frac{y}{r+y} dF = 0,$$

die ausspricht, dass die Spannungen zu einem Biegungsmomente gehören. Mit Rücksicht auf die in Abb. 49 eingeschriebenen Bezeichnungen ist $y + r = u$ und $dF = b du$ zu setzen. Daher geht die vorige Gleichung über in

$$\int_{u_1}^{u_2} \frac{u-r}{u} du = h - r \lg \frac{u_2}{u_1} = 0,$$

aus der $r = h : \lg \frac{u_2}{u_1}$ folgt. Setzt man die im vorliegenden Beispiele gewählten Zahlenwerthe ein, so findet man

$$r = 4 : \lg \frac{7}{3} = 4{,}72 \text{ cm}.$$

Die Nulllinie NN liegt also um 0,28 cm von der Mitte entfernt.

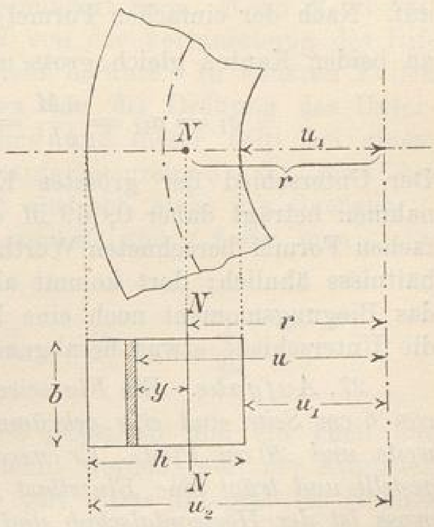

Abb. 49.

Um jetzt noch c zu berechnen, schreibe ich die Momentengleichung an:

$$M = \int \sigma dF y = c \int \frac{y^2}{r+y} dF = cb \int_{u_1}^{u_2} \frac{(u-r)^2}{u} du.$$

Für das Integral erhält man:

$$\int_{u_1}^{u_2} \frac{(u-r)^2}{u} du = \int_{u_1}^{u_2} u du - 2r \int_{u_1}^{u_2} du + r^2 \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{u} = \frac{u_2^2}{2} - \frac{u_1^2}{2} - 2rh$$
$$+ r^2 \lg \frac{u_2}{u_1} = h\left(\frac{u_2 + u_1}{2} - r\right).$$

Demnach ist

$$c = \frac{M}{bh\left(\frac{u_2+u_1}{2} - r\right)}.$$

Die Spannung an der Innenkante ($u = u_1$) sei mit σ_I, die an der Aussenkante mit σ_{II} bezeichnet; man hat dann

$$\sigma_I = c\frac{u_1 - r}{u_1} = -\frac{M}{8(5-4{,}72)} \cdot \frac{1{,}72}{3} = -0{,}256\, M,$$
$$\sigma_{II} = c\frac{u_2 - r}{u_2} = \frac{M}{8(5-4{,}72)} \cdot \frac{2{,}28}{7} = 0{,}145\, M,$$

wobei als Längeneinheit 1 cm zu Grunde gelegt ist. Die Vorzeichen der Spannungen σ_{I} und σ_{II} richten sich natürlich nach dem Drehsinne des Biegungsmoments M und kommen hier nicht weiter in Betracht. Die grösste Spannung tritt an der Innenkante auf. Nach der einfachen Formel $\sigma = \frac{M}{\Theta} y$ werden die Spannungen an beiden Kanten gleich gross und zwar

$$\sigma_{\mathrm{I}} = \sigma_{\mathrm{II}} = \frac{6\,M}{b h^2} = \frac{6\,M}{2 \cdot 16} = 0{,}187\,M.$$

Der Unterschied der grössten Kantenspannung nach beiden Annahmen beträgt daher 0,069 M oder 37% von dem nach der einfachen Formel berechneten Werthe. Bei den Haken liegen die Verhältnisse ähnlich; dort kommt aber zu der Beanspruchung durch das Biegungsmoment noch eine Normalkraft und dadurch werden die Unterschiede etwas herabgemindert.

27. Aufgabe. Ein Flusseisenstab hat quadratischen Querschnitt von 6 cm Seite und eine gekrümmte Mittellinie von 1,20 m Spannweite und 20 cm Pfeil. Er wird als elastischer Bogenträger aufgestellt und trägt eine Einzellast in der Mitte von 3000 kg. Wie gross ist der Horizontalschub und wie gross die Beanspruchung des Materials?

Lösung. Für ein Coordinatensystem der XZ, dessen Ursprung mit dem linken Auflager zusammenfällt und dessen X-Axe horizontal gerichtet ist, lautet die Gleichung einer Parabel von der Spannweite l und dem Pfeile f:

$$z = \frac{4f}{l^2}(lx - x^2).$$

Von der Mittellinie des Stabs ist zwar nicht gesagt, dass sie einen Parabelbogen bilde; man weiss vielmehr nur, wie gross Spannweite und Pfeil ist. In solchen Fällen legt man aber immer die für die Rechnung bequemste Annahme über die genauere Gestalt der Mittellinie zu Grunde. Für das Biegungsmoment M_b eines Balkens in Folge der Einzellast P in der Mitte hat man $M_b = \frac{P}{2} x$ und nach Gl. (120) findet man den Horizontalschub H

$$H = \frac{\int M_b z\, dx}{\int z^2 dx}.$$

Hierbei ist an Stelle von ds in Gl. (120) das Differential dx gesetzt. Auch dies ist eine zur bequemeren Ausrechnung dienende, praktisch zulässige Vernachlässigung, mit der man sich bekannt machen muss. Zur Rechtfertigung dafür erwähne ich zunächst, dass sich die Bogenlänge nicht viel von der Länge der Sehne unterscheidet. Hier ist aber nicht nur im Zähler, sondern auch im Nenner an Stelle von ds der kleinere Factor dx getreten und man sieht ein, dass der Fehler, der dadurch im Werthe von H begangen wird, noch weiter herabgemindert wird. Wenn M_b überall proportional mit z wäre, würde H von der Vertauschung des Differentials ds mit dx überhaupt nicht berührt. In anderen Fällen ist aber der Fehler höchstens etwa von der Ordnung des Unterschiedes zwischen Bogen und Sehne und dieser fällt bei einem flachen Bogen innerhalb der Genauigkeitsgrenzen, die man bei Festigkeitsberechnungen überhaupt anstrebt, nicht in's Gewicht.

Beim Einsetzen der Werthe von M_b und z findet man:

$$\int M_b z\, dx = 2\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{P}{2} x \frac{4f}{l^2}(lx - x^2)\, dx = \frac{5}{48} P f l^2.$$

Das Integral musste in zwei Theile gespalten und ein Theil nur über die linke Bogenhälfte ausgedehnt werden, weil der Ausdruck für M nur für diese Bogenhälfte gilt. Das Integral im Nenner von H kann dagegen sofort von 0 bis l ausgedehnt werden. Man findet

$$\int_0^l z^2\, dx = \frac{16 f^2}{l^4}\int_0^l (l^2 x^2 - 2 l x^3 + x^4)\, dx = \frac{8}{15} f^2 l.$$

Für H erhält man demnach:

$$H = \frac{\frac{5}{48} P f l^2}{\frac{8}{15} f^2 l} = \frac{25}{128} P \frac{l}{f} = 3520 \text{ kg}.$$

Das Biegungsmoment M ist:

$$M = \frac{P}{2} x - H z = 1500\, x - 3520\, z.$$

Um das Maximum zu finden, differentiiren wir nach x:

$$\frac{dM}{dx} = 1500 - 3520 \frac{dz}{dx} = 1500 - 3520 \frac{4f}{l^2}(l - 2x).$$

Dies wird zu Null für $x = 22$ cm und die Ordinate z wird an dieser Stelle $z = 12$ cm, das Vorzeichen des Moments an dieser Stelle ist negativ. Wir haben also $M_{\min} = -9200$ cmkg. Daneben kommt aber auch das Biegungsmoment im Bogenscheitel in Betracht, das kein analytisches Maximum ist, aber wegen der bis zum Bogenscheitel begrenzten Gültigkeit des Ausdrucks für M trotzdem den absolut grössten Werth annimmt. Man hat nämlich

$$M_{\frac{l}{2}} = 1500 \cdot 60 - 3520 \cdot 20 = + 19600 \text{ cmkg}.$$

An der gefährlichst beanspruchten Stelle wird daher

$$\sigma = \frac{6\,M}{bh^2} = \frac{6 \cdot 19600}{6^3} = 544 \text{ atm}.$$

Dazu kommt noch die sich gleichförmig über den Querschnitt vertheilende Druckspannung durch die axiale Belastung von der Grösse H, also $\frac{3520}{36} = 98$ atm. Die grösste Druckspannung, die das Material aufzunehmen hat, wird also gleich $544 + 98 = 642$ atm und die grösste Zugspannung gleich $544 - 98 = 446$ atm.

28. *Aufgabe. Derselbe Träger wird mit 10 000 kg gleichförmig belastet; wie gross wird der Horizontalschub a) ohne b) mit Berücksichtigung des Einflusses der Normalkraft auf die Formänderungen?*

Lösung. Wir brauchen hier nur die Zahlenwerthe in die Formeln von § 32 einzusetzen. Im Falle a) haben wir nach Gl. (121)

$$H = \frac{ql^2}{8h} = \frac{10\,000 \cdot 120}{8 \cdot 20} = 7500 \text{ kg}.$$

Für den Fall b) wenden wir Gl. (123) an. Mit $M_b = \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{z}{f}$ wird

$$\int M_b z\, dx = \frac{ql^2}{8f} \int z^2\, dx = \frac{ql^3 f}{15}$$

mit Benutzung eines schon bei der Lösung der vorausgehenden Aufgabe gefundenen Resultats. Für t^2 ist

$$t^2 = \frac{\Theta}{F} = \frac{bh^3}{12bh} = \frac{h^2}{12} = \frac{36}{12} = 3 \text{ cm}^2$$

zu setzen. Nach Gl. (123) hat man daher (nach Vertauschung von ds mit dx)

$$H = \frac{\int M_b z\, dx}{\int z^2 dx + \int t^2 dx} = \frac{\frac{ql^3 f}{15}}{\frac{8}{15} f^2 l + t^2 l} = \frac{10000 \cdot 120 \cdot 20}{8 \cdot 20^2 + 15 \cdot 3} = 7396 \text{ kg}.$$

Der Unterschied zwischen den Fällen a) und b) ist daher unerheblich.

29. *Aufgabe. Um wie viel vergrössert sich die Spannweite, wenn der in den vorhergehenden Aufgaben angeführte Stab als Balken-*

träger aufgestellt wird, unter dem Einflusse der in Aufgabe 27 angegebenen Belastung?

Lösung. Nach Gl. (124) ist, wenn an Stelle von M hier M_b gesetzt und ds mit dx vertauscht wird,

$$\Delta l = \int \frac{M_b z}{E\Theta} dx = \frac{5 P f l^2}{48 E \Theta} = \frac{5 \cdot 3000 \cdot 20 \cdot 120^2}{48 \cdot 22 \cdot 10^5 \cdot 108} = 0{,}38 \text{ cm}.$$

Dabei ist für das Integral der schon in der Lösung von Aufg. 27 gefundene Werth und für den Elasticitätsmodul E des Flusseisens $22 \cdot 10^5$ atm eingesetzt. — Wenn die Widerlager um 1 mm nachgeben, wird dadurch in jedem Belastungsfalle der Horizontalschub um $\frac{3520}{3{,}8} = 926$ kg vermindert.

30. Aufgabe. Nach welchem Gesetze muss die Stärke eines vorher auf einen grösseren Durchmesser abgedrehten Kolbenringes von der Schlitzstelle aus nach beiden Seiten hin zunehmen, wenn der Ring nach dem Einpassen in den Cylinder überall mit demselben specifischen Drucke p in radialer Richtung an der Cylinderwand anliegen soll?

Lösung. Man betrachte einen Querschnitt im Winkelabstande φ von der Schlitzstelle (vgl. Abb. 50). Die äusseren Kräfte am einen Stabtheile geben eine Resultirende, die ebenso gross und ebenso gelegen ist, als wenn sich der Druck p auf die Sehne s vertheilte. Dies folgt nämlich aus einer hydrostatischen Betrachtung, von der man bei solchen Untersuchungen oft Gebrauch macht. Ein Wasserkörper, der den Raum des Segmentes ausfüllte, wäre im Gleichgewichte, wenn von allen Seiten her der Druck p auf ihn wirkte. Daraus folgt sofort, dass die Resultirende des Drucks am Bogenumfang gleich der Resultirenden des Drucks längs der Sehne ist. Wenn wir die Breite des Rings (senkrecht zur Ebene von Abb. 50) mit b bezeichnen, ist diese Resultirende gleich pbs und das Biegungsmoment im Querschnitte φ

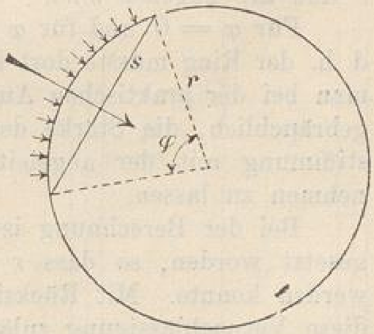

Abb. 50.

$$M = pb\frac{s^2}{2} = 2pbr^2 \sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

Vorher sei der Ring auf einen um Δr grösseren Radius abgedreht gewesen; durch die elastische Formänderung muss sich der

Radius überall auf r vermindern, wenn der Ring nachher überall satt anliegen soll. Nach Gl. (111) haben wir daher

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r + \Delta r} = \frac{M}{E\Theta} = \frac{12}{Eh^3} \cdot 2pr^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Für die linke Seite kann man, da Δr klein gegen r ist, kürzer $\frac{\Delta r}{r^2}$ setzen. Die Gleichung kann dann nach der unbekannten, veränderlichen Stärke h des Kolbenrings aufgelöst werden und gibt

$$h = c \sqrt[3]{\sin^2 \frac{\varphi}{2}},$$

wenn unter c der für den ganzen Ring constante Werth

$$c = \sqrt[3]{\frac{24pr^4}{E \cdot \Delta r}}$$

verstanden wird. Die erste von beiden Gleichungen gibt das allgemeine Gesetz an, nach dem h mit φ zunehmen muss; c dagegen ist die grösste Stärke, die der Ring an der der Schlitzstelle gegenüber liegenden Stelle erhält. Die letzte Gleichung kann daher auch umgekehrt dazu benutzt werden, die Stärke des Drucks p, mit dem der Ring an der Cylinderwand aufliegt, zu berechnen, wenn c und Δr gegeben sind.

Für $\varphi = 0$ und für $\varphi = 360^0 = 2\pi$ gibt die Formel $h = 0$, d. h. der Ring müsste dort in einer Schneide endigen. Davon sieht man bei der praktischen Ausführung ab; dagegen ist es allgemein gebräuchlich, die Stärke des Rings sonst in ungefährer Uebereinstimmung mit der abgeleiteten Formel nach der Mitte hin zunehmen zu lassen.

Bei der Berechnung ist überall h als klein gegen r vorausgesetzt worden, so dass r als Radius der Mittellinie genommen werden konnte. Mit Rücksicht auf den Zweck der Rechnung war diese Vernachlässigung zulässig. Man hätte natürlich auch für r den genaueren Werth $r - \frac{h}{2}$ setzen können; man glaube aber nicht, dass dies in Wirklichkeit eine Verbesserung wäre. Es handelt sich bei solchen Untersuchungen immer darum, die Hauptzüge einer Erscheinung in möglichst einfach gebauten Formeln wiederzugeben und auf Kleinigkeiten zu verzichten. Freilich will diese Kunst, an der rechten Stelle die angebrachte Vernachlässigung einzuführen, geübt sein, damit man nicht einmal ein Glied unterdrückt, das von grösserer, vielleicht sogar von ausschlaggebender Bedeutung ist. Nur die klare Uebersicht über alle Bedingungen der Aufgabe und die vollständige Beherrschung des Gebiets, die man durch längere Uebung gewinnt, können hier vor gelegentlichen Missgriffen schützen.

Anmerkung. Der Ausdruck für M in der vorausgehenden Rechnung kann auch noch in der folgenden Weise umgestaltet werden:

$$M = 2\,pbr^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} = pbr\,(r - r\cos\varphi) = pbrz,$$

wenn in dem letzten Ausdrucke unter z der senkrechte Abstand des zum Winkel φ gehörigen Punktes von der an der Schlitzstelle gezogenen Tangente des Kreises verstanden wird. Das Biegungsmoment ist demnach überall so gross, als wenn die Belastung durch den Umfangsdruck p entfernt und durch eine Kraft $P = pbr$ ersetzt wäre, mit der die beiden Enden des Rings an der Schlitzstelle gegen einander gezogen würden. — Hieraus folgt ganz allgemein die folgende Vorschrift für die Herstellung eines Kolbenrings, dessen Stärke h eine ganz willkürliche Function des Winkels φ sein darf und der nachher trotzdem überall mit dem gleichen Drucke p aufliegt. Man schneide den gegossenen Ring zunächst auf, ziehe dann die Enden mit einer Kraft P gegen einander und drehe ihn in diesem gespannten Zustande auf einer Drehbank aussen kreisrund zum Halbmesser des Cylinders ab, in den er später passen soll. Lässt man, nachdem dies geschehen ist, die Enden wieder frei, so federt er auseinander und der Umfang ist dann nicht mehr genau kreisrund. Sobald er aber nachher in den Cylinder eingesetzt und ihm dadurch die Gestalt wieder aufgezwungen wird, die er bei der Bearbeitung auf der Drehbank angenommen hatte, liegt er nun mit einem gleichförmigen Drucke p an der Cylinderwand an, der aus der Gleichung $P = pbr$ ohne Weiteres berechnet werden kann.

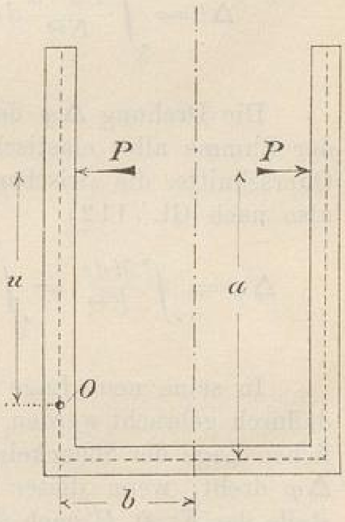

Abb. 51.

31. Aufgabe. Ein U-förmiger Bügel von constantem Querschnitte wird mit Hülfe einer zwischen den Schenkeln angebrachten Schraube in der Höhe a auseinander gebogen (vgl. Abb. 51). Die über a hinaus liegenden Theile der Schenkel bleiben hierbei geradlinig und zwar dreht sich jeder Theil beim Auseinanderbiegen um einen festen Punkt O. Man soll dessen Lage ermitteln.

Lösung. Der Körper ist als ein Bogen aufzufassen, dessen Mittellinie aus drei Seiten eines Rechtecks zusammengesetzt wird. Wir berechnen zunächst, um wieviel sich die Spannweite unter dem Einflusse eines Horizontalschubs oder Horizontalzugs verändert und dann, um welchen Winkel sich die oberen Theile der Schenkel drehen; wenn beide Werthe bekannt sind, kann daraus leicht die Lage des Drehpunktes ermittelt werden. Vorausgesetzt wird, dass der Bügel während der Formänderung so festgehalten wird, dass die Symmetrieaxe ihre Lage beibehält; auf die Bewegungen, die der Bügel daneben etwa noch im Ganzen ausführen könnte, kommt es natürlich nicht an.

Zur Berechnung von Δl verwenden wir Gl. (124):

$$\Delta l = \int \frac{Mz}{E\Theta} ds.$$

Die Integration ist über die eine Hälfte der Bogenmittellinie auszudehnen und dabei in zwei Theile zu trennen, von denen der eine sich auf die horizontale Strecke und der andere sich auf die vertikale Strecke der Mittellinie bezieht. In der ersten Strecke ist z überall gleich a, in der zweiten ist $ds = dz$ und daher

$$\Delta l = \int_0^b \frac{Pa \cdot a}{E\Theta} ds + \int_0^a \frac{Pz \cdot z}{E\Theta} dz = \frac{Pa^2}{E\Theta}\left(b + \frac{a}{3}\right).$$

Die Drehung $\Delta \varphi$ des oberen Theiles des Schenkels ist gleich der Summe aller elastischen Winkeländerungen $\Delta d\varphi$ benachbarter Querschnitte, die zwischen dem Bogenanfange und der Mitte liegen, also nach Gl. (112)

$$\Delta \varphi = \int \frac{Mds}{E\Theta} = \int_0^b \frac{Pads}{E\Theta} + \int_0^a \frac{Pz}{E\Theta} dz = \frac{Pa}{E\Theta}\left(b + \frac{a}{2}\right).$$

In seine neue Lage kann der obere Theil des Schenkels auch dadurch gebracht werden, dass man ihn um einen auf der ursprünglichen Lage der Schenkelmittellinie gelegenen Punkt um den Winkel $\Delta \varphi$ dreht, wenn dieser Punkt im Abstande u von der Angriffsstelle der Kraft H nach abwärts liegt. Man braucht den Abstand u nur so zu wählen, dass der Angriffspunkt von H bei der Drehung einen Weg Δl zurücklegt. Daraus folgt die Bedingungsgleichung

$$u \Delta \varphi = \Delta l, \text{ also } u = \frac{6b + 2a}{6b + 3a} \cdot a.$$

Da u unabhängig von P ist, folgt, dass sich der überstehende Theil des Schenkels in der That fortwährend um denselben Punkt dreht, dessen Lage zugleich ermittelt ist. — Rechnungen dieser Art sind zuweilen nöthig, um sich über die Art der elastischen Bewegungen, die in Messinstrumenten oder auch in Maschinen auftreten und dabei leicht einen störenden Einfluss ausüben, rasch Rechenschaft geben zu können.