Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

§. 36. Berechnung eines Rings oder einer Röhre auf Druck oder Zug in einer Durchmesserebene.

urn:nbn:de:hbz:466:1-84594

näherungsweise dem Hooke'schen Gesetze gehorcht. Die Lehre von den Gewölben behandle ich in der graphischen Statik und ich begnüge mich daher mit diesen kurzen Andeutungen.

§ 36. Berechnung eines Rings oder einer Röhre auf Druck oder Zug in einer Durchmesserebene.

In Abb. 46 ist ein Körper von ringförmiger Gestalt dargestellt, der zwischen zwei Platten in der Richtung des senkrechten Durchmessers mit der Kraft P zusammengedrückt wird. Auf diese Art wird z. B. ein zur Entwässerung in einen Strassenkörper eingelegtes Thonrohr beansprucht, wenn ein Wagen darüber wegfährt. An Stelle des Druckes kann auch ein Zug treten, ohne dass sich die Sache wesentlich änderte. In dieser Lage befindet sich ein Kettenglied von kreisrunder Gestalt bei einer Belastung der Kette. Alle Formänderungen und alle Spannungen sind gleich gross, aber von entgegengesetztem Wirkungssinne, als wenn der Ring mit einer ebenso grossen Kraft zusammengedrückt würde. Es genügt daher, wenn wir immer nur von diesem Falle reden; der andere ist dadurch zugleich mit erledigt.

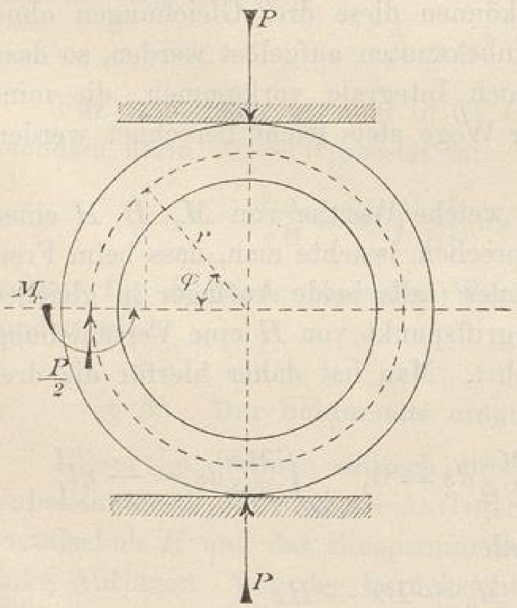

Abb. 46.

Es genügt, die Formänderung eines einzigen Quadranten zu betrachten, da die drei übrigen alle in der gleichen Lage sind; ich wähle dazu den in der Abbildung nach links oben hin gelegenen. Wenn ich diesen Quadranten aus dem ganzen Ringe loslöse, muss ich an den beiden Schnittstellen äussere Kräfte anbringen, die die vorher dort übertragenen Spannungen ersetzen. In der horizontalen Schnittfläche kann ich mir alle dort übertragenen Spannungen zu einer durch den Schwerpunkt des Querschnitts gehenden Resultirenden und einem resultirenden Kräftepaare zusammengesetzt denken. Die Resultirende muss aus Symmetriegründen rechtwinklig zum Querschnitte stehen. Die untere und die obere Ringhälfte, die dort aneinander stossen, befinden sich nämlich in genau gleichen Umständen; der zwischen ihnen übertragene Druck und Gegendruck muss daher gegen die eine ebenso liegen, wie gegen die andere und das ist nur möglich, wenn der Winkel ein rechter ist. Aus dem Gleichgewichte der einen Ringhälfte für sich betrachtet, folgt ferner, dass der in jeder horizontalen Schnittfläche übertragene Druck gleich $\frac{P}{2}$ ist. Das unbekannte Moment der Spannungen im Anfangsquerschnitte sei mit M_0 bezeichnet.

Für irgend einen Querschnitt des Quadranten, dessen Ebene mit der horizontalen Richtung den Winkel φ bildet, hat man das Biegungsmoment, also das Moment der links vom Querschnitte liegenden äusseren Kräfte, die am Quadranten wirken

$$M = M_0 + \frac{P}{2}(r - r\cos\varphi),$$

denn das Anfangsmoment M_0 behält für jeden neuen Momentenpunkt den ursprünglichen Werth. Auch die Normalkraft N für den Querschnitt φ lässt sich leicht angeben; man hat dafür

$$N = \frac{P}{2}\cos\varphi.$$

Zunächst soll aber nur auf den Einfluss der Biegungsmomente auf die Formänderung geachtet werden, da dieser, wie gewöhnlich bei solchen Aufgaben, erheblich überwiegt, so dass es in der Regel genügt, ihn bei der Durchführung der Rechnung ausschliesslich zu beachten.

Die Bedingung, der die Formänderung hier unterworfen ist, besteht darin, dass die beiden Schnittflächen des Quadranten immer senkrecht zueinander bleiben müssen. Allgemein gehört nämlich der ganze Umfang der Mittellinie zu einem Centriwinkel von 360° und dieser Winkel kann sich nicht ändern, so lange die Mittellinie fortfährt, eine in sich zurückkehrende Curve zu bilden, so lange also kein Bruch erfolgt. Da nun hier der Ring in vier sich ganz gleich verhaltende Quadranten zerfällt, kann sich auch der zu einem dieser Quadranten gehörige Centriwinkel nicht ändern. Die Bedingungsgleichung, die zur Ermittelung der einzigen unbekannten Grösse M_0 führt, lautet daher ganz einfach

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta d\varphi = 0.$$

Man braucht nur für $\Delta d\varphi$ seinen Werth

$$\Delta d\varphi = \frac{M\,ds}{E\Theta} = \frac{\left(M_0 + \frac{Pr}{2} - \frac{Pr}{2}\cos\varphi\right) r\,d\varphi}{E\Theta}$$

einzusetzen und zu integriren. Da E und Θ constant sind, kann man diese Factoren streichen, ebenso den constanten Factor r im Zähler; es bleibt also

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(M_0 + \frac{Pr}{2} - \frac{Pr}{2}\cos\varphi\right) d\varphi = M_0\frac{\pi}{2} + \frac{Pr\pi}{4} - \frac{Pr}{2} = 0$$

und durch Auflösen erhält man

$$M_0 = -\frac{\pi - 2}{2\pi} Pr = -0{,}182\, Pr.$$

Am Ende des horizontalen Durchmessers ist das Biegungsmoment demnach negativ, d. h. es bringt eine stärkere Krümmung hervor. Dies war auch schon auf Grund der oberflächlichsten Betrachtung zu erwarten und wir können auf Grund derselben Betrachtung des ganzen Vorgangs sofort voraussagen, dass das Moment im Scheitel positiv werden muss, also eine Verminderung der Krümmung an dieser Stelle bewirkt. Auch in Abb. 46 ist übrigens der Drehpfeil von M_0 für den betrachteten Quadranten in Voraussicht dieses Resultates schon entgegengesetzt dem Uhrzeigersinne eingetragen worden.

Das andere Glied in dem Ausdrucke für M ist bei jedem weiteren Querschnitte des Quadranten positiv; demnach ist M_0 zugleich das grösste Biegungsmoment von negativem Vorzeichen. Das grösste positive Moment muss dagegen im Scheitel eintreten. Mit $\varphi = \frac{\pi}{2}$ geht M, das wir dann mit $M_{\frac{\pi}{2}}$ bezeichnen, über in

$$M_{\frac{\pi}{2}} = \frac{Pr}{\pi} = 0{,}318\,Pr.$$

Im Scheitel tritt also zugleich das absolut grösste Moment und damit die grösste Beanspruchung des Materials auf. Die Spannung σ lässt sich daraus sofort berechnen. Wenn der ringförmige Körper z. B. ein Rohr von der überall gleichen Wandstärke δ und der Länge l ist, bildet der Querschnitt ein Rechteck vom Widerstandsmomente $\frac{l\delta^2}{6}$ und für σ erhält man

$$\sigma = \frac{6\,Pr}{\pi l \delta^2}. \tag{127}$$

Wenn der Einfluss der Normalkraft N auf die Formänderung nicht zu vernachlässigen ist, hat man nach Gl. (110)

$$\Delta d\varphi = \frac{N}{EF}\,d\varphi + \frac{Mr\,d\varphi}{E\Theta}$$

oder nach Einsetzen der Werthe von N und M

$$\Delta d\varphi = \left\{\frac{P}{2EF}\cos\varphi + \frac{M_0 r}{E\Theta} + \frac{P}{2E\Theta}(r - r\cos\varphi)r\right\} d\varphi.$$

Integrirt man dies zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ und setzt das Integral gleich Null, so erhält man

$$\frac{P}{2EF} + \frac{M_0 r}{E\Theta}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{Pr^2}{2E\Theta}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{Pr^2}{2E\Theta} = 0$$

und hieraus durch Auflösen nach M_0

$$M_0 = -\left(Pr\frac{\pi - 2}{2\pi} + \frac{Pt^2}{\pi r}\right),$$

wenn man mit t den Trägheitsradius des Querschnitts bezeichnet. Speciell für den rechteckigen Querschnitt des Rohres ist $t^2 = \frac{\delta^2}{12}$ und hiermit

$$M_0 = -Pr\left(\frac{\pi - 2}{2\pi} + \frac{\delta^2}{12 r^2 \pi}\right).$$

Das zur Berücksichtigung des Einflusses der Normalspannungen gegen früher hinzugetretene letzte Glied der Klammer ist nur dann von merklicher Grösse, wenn die Wandstärke der Röhre ziemlich gross gegen den lichten Durchmesser ist.

Für das Moment im Scheitel findet man

$$M_{\frac{\pi}{2}} = M_0 + \frac{Pr}{2} = \frac{Pr}{\pi}\left(1 - \frac{\delta^2}{12 r^2}\right). \tag{128}$$

Auf das Moment im Scheitel kommt es bei der Festigkeitsberechnung an. Dieses wird etwas geringer, als wir es bei der vorausgehenden einfacheren Betrachtung fanden, d. h. das Rohr kann etwas mehr Druck aushalten, als es nach Gl. (127) scheinen könnte. Diese Gleichung ist vielmehr ebenfalls, wenn man genauer rechnen will, durch

$$\sigma = \frac{6 Pr}{\pi l \delta^2}\left(1 - \frac{\delta^2}{12 r^2}\right) \tag{129}$$

zu ersetzen. Mit $\delta = \frac{r}{5}$ macht indessen das Correctionsglied nur $\frac{1}{3}\%$ aus und ist daher zu vernachlässigen. Erst bei ganz dickwandigen Röhren kommt es in Betracht.

Anmerkung. Die vorausgehenden Berechnungen setzen voraus, dass die Elasticitätsgrenze nicht überschritten ist. Drückt man einen Ring aus einem dehnbaren Metalle zusammen, so wird sofort nach dem ersten Auftreten bleibender Formänderungen ein anderer Spannungszustand einsetzen. Am Scheitel, wo die grössten Spannungen auftreten, genügt schon eine sehr kleine bleibende Formänderung, um den Werth des Biegungsmoments an dieser Stelle herab und hiermit zugleich den Werth von M_0 hinauf zu setzen. Dies hat zur Folge, dass ein solcher Metallring grössere Lasten zu tragen vermag, als sich aus der vorausgehenden Berechnung ergibt, bevor er in merklicher Weise bleibend zusammengedrückt wird. Einige Versuche, die ich mit Rohrabschnitten anstellte, haben dies bestätigt.

Wir wollen jetzt noch berechnen, um wie viel sich der horizontale Durchmesser der Röhre bei der Belastung vergrössert. Dazu können wir uns der in § 33 für die Vergrösserung Δl der Spannweite eines Bogenträgers abgeleiteten Formeln bedienen. Nach Gl. (124) war

$$\Delta l = \int \frac{Mz}{E\Theta} ds.$$

Da l hier schon in einem anderen Sinne (als Länge des Rohrs) gebraucht ist, schreibe ich Δd für die Vergrösserung des Durchmessers d. An Stelle von M ist im linken Quadranten $M = M_0 + \frac{P}{2}(r - r\cos\varphi)$ und für z ist $z = r\sin\varphi$ zu setzen. Die Integration wird nur über den linken Quadranten ausgedehnt und dann das Doppelte des Resultats genommen, da der Quadrant rechts ebenso viel zu Δd beiträgt. Diese Spaltung des Integrals ist nöthig, weil der für M angegebene Ausdruck in dieser Form nur für den linken Quadranten gültig ist. Für Θ setze ich noch $\Theta = \frac{l\delta^3}{12}$, um die Betrachtung für ein Rohr (oder überhaupt für einen rechteckigen Querschnitt) vollständig durchzuführen. Man findet nach Ausführung der Integration

$$\Delta d = \frac{Pr^3}{E\Theta} \cdot \frac{4-\pi}{2\pi} = 1{,}639 \frac{Pr^3}{El\delta^3}. \tag{130}$$

Natürlich hätte man alle diese Berechnungen auch auf Grund des Satzes von der kleinsten Formänderungsarbeit durchführen können. Ich will hier noch zeigen, wie dieser Satz selbst noch in einem viel allgemeineren Falle zur Lösung der Aufgabe benutzt werden kann. Abb. 47 (S. 240) gibt den ringförmigen Körper unter dem Einflusse beliebig längs des Umfangs vertheilter Druckkräfte (an deren Stelle auch Zugkräfte treten können) an. Von diesen äusseren Kräften wird nur verlangt, dass sie sich an dem Ringe im Gleichgewichte halten sollen. Man soll die dadurch hervorgerufenen Spannungen berechnen.

Um die Aufgabe zu lösen, führe man irgend einen Querschnitt mm durch den Ring. Die in diesem Schnitte übertragenen Spannungen kann man zusammensetzen zu einer Normalkraft N_0, einer Schubkraft T_0 und einem Anfangsmomente M_0. Wenn diese drei Grössen für den Anfangsquerschnitt bekannt wären, könnte man für irgend einen anderen Querschnitt, der mit dem ersten einen Winkel φ bildet, die entsprechenden Grössen N, T, M sofort angeben und daraus liessen sich alle Spannungen berechnen. Die Aufgabe ist also dreifach statisch unbestimmt oder mit anderen Worten: der in dieser Aufgabe vorkommende Ring bildet nur einen besonderen Fall des in § 35 besprochenen beiderseits eingespannten Bogens. Die beiden Bogenenden fallen hier miteinander zusammen. In der That kann nun auch die Aufgabe, die drei Unbekannten $N_0 T_0 M_0$ zu berechnen, genau so gelöst werden, wie es dort gezeigt wurde. Man stellt zuerst den Ausdruck für die Formänderungsarbeit A auf, wobei es in der Regel genügen wird, nur auf den Einfluss der Biegungsmomente M zu achten. Dann setzt man die drei Differentialquotienten von A nach N_0, T_0 und M_0 gleich Null und löst diese Gleichungen nach den Unbekannten auf. Denn die Bedingung, dass der Ring im Querschnitte mm in Wirklichkeit zusammenhängt, kommt darauf hinaus, dass sich der Angriffspunkt von N_0 und T_0 nicht verschieben und dass sich die Angriffsstelle von M_0 auch nicht drehen kann, wenn man sich das jenseits des Querschnitts gelegene Ende des aufgeschnittenen Rings gehalten denkt. Diesen Verschiebungen und Drehungen sind aber die Differentialquotienten von A nach $N_0 T_0 M_0$ nach dem Satze von Castigliano gleich und die Differentialquotienten von A sind daher gleich Null zu setzen.

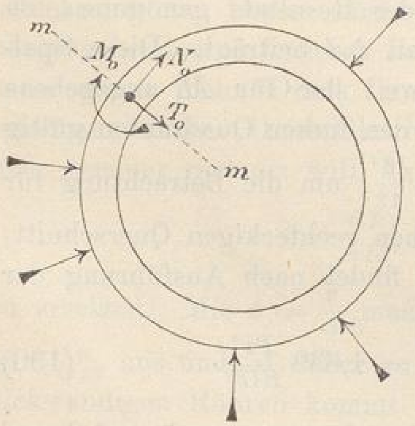

Abb. 47.

Man bemerkt hier wieder, wie der Satz von der kleinsten Formänderungsarbeit ohne vieles Nachdenken ganz mechanisch von selbst zu der richtigen Lösung führt.

Die Glieder von Ketten sind gewöhnlich von länglicher

Gestalt. Wenn man die Mittellinie als eine Ellipse betrachtet, kann man die Berechnung auf ganz ähnliche Art durchführen, wie es im Eingange des Paragraphen für den kreisförmigen Ring gezeigt wurde. Bei der Ausführung der Integration kommt man aber in diesem Falle auf elliptische Integrale. Est ist daher besser, wenn man in solchen Fällen zum Ersatze der Integration durch eine Summirung endlicher Theile, also zu einer mechanischen Quadratur seine Zuflucht nimmt. Abgesehen von der dadurch veranlassten etwas langwierigeren Rechnung macht die Lösung der Aufgabe aber auch in diesem Falle gar keine Schwierigkeiten von grundsätzlicher Art. — Auf eine in dieser Weise durchgeführte Berechnung von Kettengliedern, bei der sowohl die Bernouillische Annahme, als die Annahme des gradlinigen Spannungsvertheilungsgesetzes berücksichtigt ist, habe ich schon in § 31 hingewiesen. Im Zusammenhange hiermit beachte man jedoch auch die Anmerkung auf S. 238.

§ 37. Berechnung der ebenen Spiralfedern.

Wenn die Feder (vgl. Abb. 48) aufgezogen, d. h. wenn die in der Mitte liegende Spindel gedreht wird, während das äussere Ende der Feder festgehalten ist, verbiegt sich jedes Längenelement ds der Mittellinie zu einem kleineren Krümmungshalbmesser. Die ganze Drehung $\Delta\varphi$ der Spindel ist gleich der Summe der elastischen Winkeländerungen $\Delta d\varphi$ der aufeinander folgenden Querschnitte jedes Elementes ds. Zugleich tritt an dem äusseren Ende eine Kraft P auf, mit der die Feder an der Befestigungsstelle zurückgehalten wird. Die Richtung dieser Kraft P ist senkrecht zu dem nach der Befestigungsstelle von der Mitte aus gezogenen Radiusvector anzunehmen, denn eine in der Richtung dieses Radiusvectors angebrachte äussere

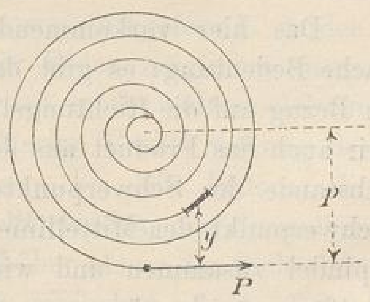

Abb. 48