Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

§. 35. Der beiderseits eingespannte Bogen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-84594

die wir früher unter der Voraussetzung, dass keine Temperaturschwankungen vorkämen, zur Berechnung der U benutzten. Mit Gl. (126) und den entsprechenden für die übrigen statisch unbestimmten Grössen ist aber nun genau so zu verfahren, wie früher; die Auflösung liefert die Unbekannten U. Uebrigens kann unter U auch ein unbekanntes Kräftepaar (ein Einspannmoment) verstanden werden; dann bedeutet u die Winkeldrehung der Angriffsstelle, wenn der Träger statisch bestimmt gemacht wurde. Auch diese lässt sich in jedem Falle ohne Weiteres für eine gegebene Temperaturänderung ermitteln.

Diese allgemeine Betrachtung sei gleichfalls an dem Beispiele des Bogens mit zwei Gelenken näher erläutert. Es genügt, wenn wir den Horizontalschub für den Fall berechnen, dass gar keine Lasten angreifen. Mit $U = H$ und $u = -\eta l$ schreibt sich Gl. (126)

$$\frac{\partial A}{\partial U} = \eta l.$$

Für A nehmen wir den in Gl. (118) angegebenen Werth, nachdem darin $M_b = 0$ gesetzt ist. Wir erhalten

$$\frac{\partial A}{\partial H} = H \int \frac{z^2}{E\Theta} ds = \eta l,$$

woraus für H wieder derselbe Werth wie in Gl. (125) gefunden wird.

§ 35. Der beiderseits eingespannte Bogen.

Dieser ist dreifach statisch unbestimmt: Wir wählen als Unbekannten U die vertikale Auflagercomponente B, den Horizontalschub H und das Einspannmoment M_0, alle drei für das linke Auflager. Von der Berücksichtigung des Einflusses der Normalkräfte auf die Formänderung wollen wir der Einfachheit halber absehen. Für das Biegungsmoment M im Querschnitte x erhalten wir, wenn wir im Uebrigen die früheren Bezeichnungen beibehalten,

$$M = M_0 + Bx - Hz - \sum_0^x P(x - p),$$

also z. B. für eine gleichförmige Belastung des Bogens

$$M = M_0 + Bx - Hz - \frac{qx^2}{2}.$$

Wir bilden jetzt

$$A = \frac{1}{2}\int \frac{M^2}{E\Theta} ds$$

und setzen die drei partiellen Differentialquotienten nach M_0, B und H gleich Null. Dies liefert

$$\frac{\partial A}{\partial M_0} = \int \frac{M}{E\Theta}\frac{\partial M}{\partial M_0} ds = \int \frac{M}{E\Theta} ds = 0,$$

$$\frac{\partial A}{\partial B} = \int \frac{M}{E\Theta}\frac{\partial M}{\partial B} ds = \int \frac{Mx}{E\Theta} ds = 0,$$

$$\frac{\partial A}{\partial H} = \int \frac{M}{E\Theta}\frac{\partial M}{\partial H} ds = -\int \frac{Mz}{E\Theta} ds = 0,$$

Nach Einsetzen von M können diese drei Gleichungen ohne Weiteres nach den drei Unbekannten aufgelöst werden, so dass in dieser Lösung nur noch Integrale vorkommen, die mindestens auf mechanischem Wege stets leicht berechnet werden können.

Um zu untersuchen, welche Werthe von M_0, B, H einer Temperaturänderung entsprechen, beachte man, dass beim Freigeben des linken Bogenendes (falls beide Auflager in gleicher Höhe liegen) nur der Angriffspunkt von H eine Verschiebung in der Kraftrichtung erfährt. Man hat daher hierfür die drei Gleichungen

$$\int \frac{M}{E\Theta} ds = 0, \qquad \int \frac{Mx}{E\Theta} ds = 0, \qquad \int \frac{Mz}{E\Theta} ds = -\eta l,$$

in denen für M der Werth

$$M = M_0 + Bx - Hz$$

einzusetzen ist. Nachdem dies geschehen ist, können die drei Gleichungen wiederum leicht nach M_0, B und H aufgelöst werden.

Als beiderseits eingespannter elastischer Bogenträger ist ein Tonnengewölbe aufzufassen, das aus einem Materiale aufgeführt ist, von dem man annehmen kann, dass es wenigstens näherungsweise dem Hooke'schen Gesetze gehorcht. Die Lehre von den Gewölben behandle ich in der graphischen Statik und ich begnüge mich daher mit diesen kurzen Andeutungen.

§ 36. Berechnung eines Rings oder einer Röhre auf Druck oder Zug in einer Durchmesserebene.

In Abb. 46 ist ein Körper von ringförmiger Gestalt dargestellt, der zwischen zwei Platten in der Richtung des senkrechten Durchmessers mit der Kraft P zusammengedrückt wird. Auf diese Art wird z. B. ein zur Entwässerung in einen Strassenkörper eingelegtes Thonrohr beansprucht, wenn ein Wagen darüber wegfährt. An Stelle des Druckes kann auch ein Zug treten, ohne dass sich die Sache wesentlich änderte. In dieser Lage befindet sich ein Kettenglied von kreisrunder Gestalt bei einer Belastung der Kette. Alle Formänderungen und alle Spannungen sind gleich gross, aber von entgegengesetztem Wirkungssinne, als wenn der Ring mit einer ebenso grossen Kraft zusammengedrückt würde. Es genügt daher, wenn wir immer nur von diesem Falle reden; der andere ist dadurch zugleich mit erledigt.

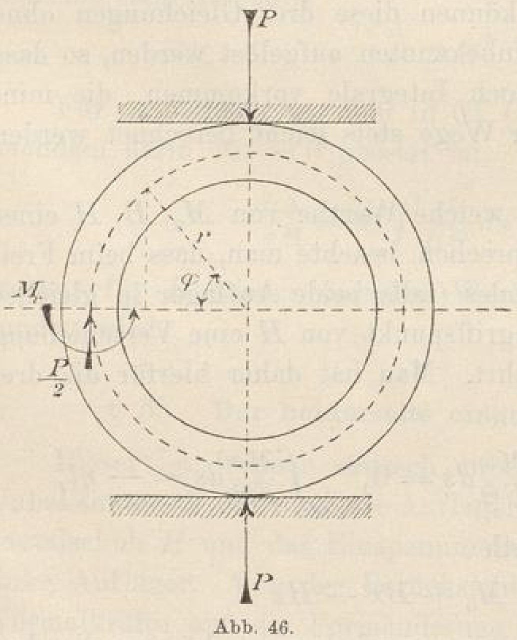

Abb. 46.

Es genügt, die Formänderung eines einzigen Quadranten zu betrachten, da die drei übrigen alle in der gleichen Lage sind; ich wähle dazu den in der Abbildung nach links oben hin gelegenen. Wenn ich diesen Quadranten aus dem ganzen Ringe loslöse, muss ich an den beiden Schnittstellen äussere Kräfte anbringen, die die