Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

Formel für den Horizontalschub.

Hierbei ist das Biegungsmoment, das ein Balkenträger bei derselben Belastung im Querschnitte x aufzunehmen hätte, zur Abkürzung mit M_b bezeichnet, d. h. M_b ist ein Ausdruck von der Form

$$M_b = Ax - \sum_0^x P(x-p),$$

also bei gegebenen Lasten eine bekannte Grösse. Die dem Biegungsmomente M im Bogenelemente entsprechende Formänderungsarbeit kann nach Gl. (87) berechnet werden, wenn man darin dx durch ds ersetzt, denn für die Verdrehung der benachbarten Querschnitte gegeneinander gilt beim Bogen dieselbe Formel wie beim geraden Stabe. Vernachlässigt man neben dieser Formänderungsarbeit die durch die axiale Belastung N und die durch die Schubkraft hervorgerufene, so wird für den ganzen Bogen

$$A = \frac{1}{2}\int \frac{M^2}{E\Theta} ds = \frac{1}{2}\int \frac{(M_b - Hz)^2}{E\Theta} ds, \tag{118}$$

worin die Integration über die ganze Bogenlänge auszudehnen ist.

Wir bilden den Differentialquotienten dieses Ausdrucks nach der statisch unbestimmten Grösse H und setzen ihn gleich Null. Dies liefert

$$\frac{\partial A}{\partial H} = -\int \frac{M_b - Hz}{E\Theta} z\,ds = -\int \frac{M_b z}{E\Theta} ds + H\int \frac{z^2}{E\Theta} ds = 0,$$

und durch Auflösen der Gleichung nach der Unbekannten H finden wir

$$H = \frac{\int \frac{M_b z}{E\Theta} ds}{\int \frac{z^2}{E\Theta} ds}. \tag{119}$$

Der Elasticitätsmodul E kann fast in allen Fällen, die überhaupt vorkommen, als constant über die ganze Bogenlänge angesehen werden. Für den besonderen Fall, dass ausserdem auch das Trägheitsmoment des Querschnitts überall dieselbe Grösse hat, vereinfacht sich Gl. (119) zu

$$H = \frac{\int M_b z\,ds}{\int z^2 ds}. \tag{120}$$

Die Integrale in diesen Formeln können immer ohne Schwierigkeit berechnet werden, sei es durch gewöhnliche Integration, sei es durch eine mechanische Quadratur. Im Wesentlichen ist also die Aufgabe hiermit als gelöst zu betrachten.

Wir wollen diese Formeln jetzt auf ein einfaches Beispiel anwenden. Die Bogenmittellinie sei ein Parabelbogen, dessen Axe die Spannweite senkrecht halbirt, und die Belastung sei über die ganze Spannweite gleichförmig vertheilt, d. h. so, dass zu Bogenabschnitten von gleicher Horizontalprojection gleiche Lasten gehören. Dieser Fall hat übrigens eine allgemeinere Bedeutung, als es nach dem Wortlaute der Aufstellung scheinen könnte. Jeder flache Bogen von symmetrischer Gestalt kommt nämlich dem Parabelbogen nahe, z. B. auch ein flacher Kreisbogen. Näherungsweise kann daher jeder flache Bogen als ein Parabelbogen aufgefasst werden und man macht davon bei solchen Berechnungen mit Vorliebe Gebrauch, weil sich die Ausführung der Rechnung beim Parabelbogen am einfachsten gestaltet.

Bei gleichförmiger Belastung ist das Biegungsmoment M_b eines Balkens im Abstande x vom linken Auflager

$$M_b = \frac{ql}{2} x - \frac{qx^2}{2}$$

und die Momentenfläche ist selbst eine Parabel, die bei geeigneter Wahl des Maassstabes, in dem M_b aufgetragen wird, zum Zusammenfallen mit der Bogenmittellinie gebracht werden kann. In der Mitte geht M_b in $\frac{ql^2}{8}$ und z in die Pfeilhöhe h des Bogens über, daher kann auch überall

$$M_b = \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{z}{h}$$

gesetzt werden. Führt man dies in Gl. (120) ein, so erhält man

$$H = \frac{ql^2}{8h}, \tag{121}$$

da sich der Nenner gegen den ihm gleichen Factor des Zählers weghebt.

Mit diesen Werthen von M_b und H wird die Formänderungsarbeit A, wie aus Gl. (118) hervorgeht, zu Null. Wenn überhaupt der Werth Null für die Formänderungsarbeit bei passender Wahl der statisch unbestimmten Grösse möglich ist, entspricht er immer einem Minimum, da A niemals negativ werden kann. Wir hätten daher auch schon auf Grund dieser einfachen Ueberlegung den Werth von H bestimmen können. Zugleich werden wir aber hierdurch aufmerksam darauf, dass die Gl. (120) oder (119) nicht den genauen Werth von H liefern können, denn in der That wird eine kleine Formänderung beim Aufbringen von Lasten auf einen elastischen Körper immer eintreten und es wird also A nicht genau gleich Null sein können.

Der Grund für diesen Widerspruch liegt darin, dass wir bei der Berechnung von A nur auf die Arbeitsleistung durch die Biegungsmomente Rücksicht genommen haben. Um zu genaueren Resultaten zu gelangen, muss vor Allem auf die Arbeitsleistung der Normalkraft N Rücksicht genommen werden Die Arbeit der Schubspannungen kann dagegen, wenn man auf Kleinigkeiten nicht zu achten braucht, immer noch vernachlässigt werden, und zwar mit viel grösserem Rechte als beim Balkenträger, weil beim Bogen die Schubkräfte an sich viel geringer ausfallen als beim Balken. Wenn man will, kann man indessen auch dieses Glied, gerade so wie es früher beim Balken gezeigt wurde, in Ansatz bringen; da es practisch ganz bedeutungslos ist, sehe ich aber hier davon ab.

Eine über den Querschnitt F gleichförmig vertheilte Normalspannung σ von der Grösse

$$\sigma = \frac{N}{F}$$

leistet beim Zusammendrücken des Bogenelementes ds eine Arbeit, die auf die Volumeneinheit bezogen nach Gl. (41)

$$\mathsf{A} = \frac{\sigma^2}{2E}$$

gesetzt werden kann. Multiplicirt man dies mit dem Volumen Fds des Bogenelementes, so findet man

$$dA = \frac{\sigma^2 F}{2E} ds = \frac{N^2}{2EF} ds.$$

Nachdem diese Formänderung vollzogen ist, denken wir uns das Biegungsmoment zur Wirksamkeit gebracht. Dabei dreht sich der eine Querschnitt relativ zum andern und zwar nach der von mir zu Grunde gelegten Annahme über die Spannungsvertheilung um eine durch den Schwerpunkt gehende Axe. Dabei verschieben sich auch die Angriffspunkte der schon vorher angebrachten Normalspannungen $\sigma = \frac{N}{F}$ von Neuem und wir müssen zunächst berechnen, wie gross die bei dieser Drehung von ihnen geleistete Arbeit ist. Für ein Flächenelement dF im Abstande y von der Schwerlinie ist die Verschiebung des Angriffspunktes der an ihm von Anfang an wirkenden Normalspannung gleich

$$y \Delta d\varphi$$

und die gesammte Arbeitsleistung dieser Normalspannungen daher gleich

$$\int \sigma dF y \Delta d\varphi = \frac{N \Delta d\varphi}{F} \int y dF.$$

Nach der Eigenschaft der Schwerlinien ist aber das letzte Integral gleich Null. Im Ganzen genommen leisten daher die schon vorher in gleichförmiger Vertheilung aufgebrachten Normalspannungen während der Drehung keine Arbeit; es bleiben also nur die Arbeitsleistungen der durch das Biegungsmoment selbst hervorgerufenen Normalspannungen bei dieser Bewegung übrig und diese sind ebenso gross, als wenn zu Beginn ihres Auftretens das Trägerelement spannungslos gewesen wäre.

Auch umgekehrt könnte man zeigen, dass die vom Biegungsmomente für sich hervorgerufenen Spannungen keine Arbeit mehr leisten, wenn nach ihnen die Normalkraft N angebracht wird. Jedenfalls kann also die durch das Zusammenwirken von M und N geleistete Formänderungsarbeit gleich der Summe der beiden Ausdrücke gesetzt werden, die für M

und N für sich gefunden wurden. An Stelle von Gl. (118) schreiben wir daher jetzt

$$A = \frac{1}{2}\int \frac{M^2}{E\Theta} ds + \frac{1}{2}\int \frac{N^2}{EF} ds.$$

Wenn wir jetzt dieselbe Rechnung wiederholen, die zu Gl. (119) führte, erhalten wir

$$\frac{\partial A}{\partial H} = -\int \frac{M_b z}{E\Theta} ds + H\int \frac{z^2}{E\Theta} ds + \int \frac{N}{EF} \cdot \frac{\partial N}{\partial H} ds = 0.$$

Hier ist noch N als Function von H auszudrücken, was leicht geschehen kann. Um langwierige Formeln zu vermeiden, von denen man später doch keinen Gebrauch macht, weise ich darauf hin, dass bei einem sehr flachen Bogen, für den diese Rechnung hauptsächlich von Wichtigkeit ist, weil bei ihm der Horizontalschub H und daher N besonders gross ausfällt, nahezu $N = H$ gesetzt werden kann. Mit dieser Vereinfachung erhält man

$$\frac{\partial N}{\partial H} = 1$$

und die Auflösung der vorigen Gleichung liefert

$$H = \frac{\int \frac{M_b z}{E\Theta} ds}{\int \frac{z^2}{E\Theta} ds + \int \frac{ds}{EF}}. \tag{122}$$

Wenn neben E auch Θ und F als constant angesehen werden können, vereinfacht sich dies noch weiter zu

$$H = \frac{\int M_b z\, ds}{\int (z^2 + t^2)\, ds}. \tag{123}$$

Unter t ist der Trägheitshalbmesser des Querschnitts, unter t^2 also $\frac{\Theta}{F}$ zu verstehen. Der Vergleich dieser Formel mit Gl. (120) zeigt uns nun auch, welchen Einfluss die Berücksichtigung der Normalspannungen neben den Biegungsmomenten auf den Werth von H ausübt. So lange t klein gegen den Durchschnittswerth der Ordinaten z ist, unterscheiden sich die beiden Werthe von H nach (120) und nach (123) nur unerheblich von einander. Dieser