



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

§. 32. Der Bogen mit zwei Gelenken.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-84594](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-84594)

Bei den übrigen practischen Anwendungen sind übrigens glücklicherweise die Krümmungsradien gewöhnlich ziemlich gross gegen die Querschnittsabmessungen, so dass es ziemlich gleichgültig ist, ob man die gewöhnliche Biegungsgleichung oder die verwickeltere Formel (115) anwendet, namentlich mit Rücksicht darauf, dass die Festigkeitsberechnungen immer nur als Annäherungsrechnungen aufzufassen sind, bei denen es auf einige Procente mehr oder weniger im Schlussresultate nicht ankommt. In der Folge werde ich daher auf die verwickelteren Betrachtungen, die sich an Gl. (115) anschliessen, nicht weiter eingehen.

Mit der Wahl des Gradliniengesetzes für die Spannungsvertheilung ist natürlich umgekehrt die Folgerung verbunden, dass die Querschnitte auch dann, wenn nur ein Biegemoment und keine Schubkraft auftritt, etwas gekrümmt werden. Unter diesen Umständen muss man sich darüber einigen, was unter der elastischen Aenderung $\Delta d\varphi$ des Winkels zwischen zwei Querschnitten verstanden werden soll. Ich werde darunter die Aenderung des Winkels zwischen den aufeinander folgenden Tangenten der Stabmittellinie verstehen. Dann kann Gl. (112) zur Berechnung von $\Delta d\varphi$ angewendet werden, wenn man unter ds das Längenelement der Mittellinie versteht.

§ 32. Der Bogen mit zwei Gelenken.

Ein Stab von gekrümmter Mittellinie stütze sich an beiden Enden auf zwei Zapfen, um die er sich frei drehen kann. Es handelt sich um die Berechnung der Auflagerkräfte, die von diesen Zapfen aufgenommen werden, wenn beliebig gegebene Lasten an dem Stabe angreifen. Die Aufgabe ist einfach statisch unbestimmt, da jeder Auflagerdruck erst durch zwei Componenten völlig bestimmt ist, während die Statik starrer Körper nur drei Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung stellt.

Die Zapfen, auf die sich der Bogen stützt, bezeichnet man als Gelenke; bei der Berechnung treten sie nur als Punkte auf, unter denen man sich die Zapfenmittelpunkte zu denken hat.

Der Bogen mit zwei Gelenken kommt in der Praxis namentlich als Brückenträger vor (heute freilich seltener als früher, da man jetzt den Fachwerkträgern vor den vollwandigen Constructionen den Vorzug zu geben pflegt). Da er nur auf Grund der Elasticitätstheorie berechnet werden kann, wird er auch häufig als „elastischer Bogenträger“ bezeichnet. Abb. 44

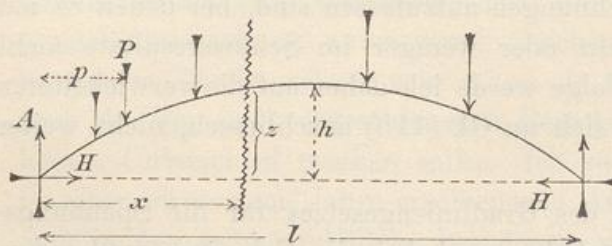


Abb. 44.

zeigt die übliche Anordnung: beide Gelenke liegen in gleicher Höhe und der Bogen nimmt nur senkrecht gerichtete Lasten auf. Die senk-

rechten Componenten beider Auflagerkräfte können in diesem Falle ohne Weiteres mit Hilfe von Momentengleichungen für die Gelenke als Momentenpunkte berechnet werden; sie sind ebenso gross als die Auflagerkräfte eines Balkens, der dieselben Lasten trägt. Dazu tritt aber noch die Horizontalcomponente jedes Auflagerdrucks, von der man nach den allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen nur aussagen kann, dass sie an beiden Gelenken gleich gross, aber entgegengesetzt gerichtet sein muss. Die Grösse dieser Horizontalcomponente bezeichnet man als den Horizontalschub H des Bogens; dieser bildet die statisch unbestimmte Grösse, auf deren Ermittlung es vor allen Dingen ankommt. Denn man sieht ein, dass die Biegemomente, die Schub- und die Normalkräfte für alle Querschnitte und daher auch die Spannungen an allen Stellen sofort angegeben werden können, wenn H bekannt ist. Wir können uns daher hier darauf beschränken, die Berechnung von H auseinander zu setzen.

Diese Aufgabe soll zunächst auf Grund des Satzes von der kleinsten Formänderungsarbeit gelöst werden. Wenn die zur Abscisse x gehörige Ordinate der Stabmittellinie mit z bezeichnet wird, hat man für das Biegemoment im Querschnitte x

$$M = M_b - Hz. \quad (117)$$

Hierbei ist das Biegemoment, das ein Balkenträger bei derselben Belastung im Querschnitte x aufzunehmen hätte, zur Abkürzung mit M_b bezeichnet, d. h. M_b ist ein Ausdruck von der Form

$$M_b = Ax - \sum_0^x P(x-p),$$

also bei gegebenen Lasten eine bekannte Grösse. Die dem Biegemomente M im Bogenelemente entsprechende Formänderungsarbeit kann nach Gl. (87) berechnet werden, wenn man darin dx durch ds ersetzt, denn für die Verdrehung der benachbarten Querschnitte gegeneinander gilt beim Bogen dieselbe Formel wie beim geraden Stabe. Vernachlässigt man neben dieser Formänderungsarbeit die durch die axiale Belastung N und die durch die Schubkraft hervorgerufene, so wird für den ganzen Bogen

$$A = \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{E\Theta} ds = \frac{1}{2} \int \frac{(M_b - Hz)^2}{E\Theta} ds, \quad (118)$$

worin die Integration über die ganze Bogenlänge auszudehnen ist.

Wir bilden den Differentialquotienten dieses Ausdrucks nach der statisch unbestimmten Grösse H und setzen ihn gleich Null. Dies liefert

$$\frac{\partial A}{\partial H} = - \int \frac{M_b - Hz}{E\Theta} z ds = - \int \frac{M_b z}{E\Theta} ds + H \int \frac{z^2}{E\Theta} ds = 0,$$

und durch Auflösen der Gleichung nach der Unbekannten H finden wir

$$H = \frac{\int \frac{M_b z}{E\Theta} ds}{\int \frac{z^2}{E\Theta} ds}. \quad (119)$$

Der Elasticitätsmodul E kann fast in allen Fällen, die überhaupt vorkommen, als constant über die ganze Bogenlänge angesehen werden. Für den besonderen Fall, dass ausserdem auch das Trägheitsmoment des Querschnitts überall dieselbe Grösse hat, vereinfacht sich Gl. (119) zu

$$H = \frac{\int M_b z ds}{\int z^2 ds}. \quad (120)$$

Die Integrale in diesen Formeln können immer ohne Schwierigkeit berechnet werden, sei es durch gewöhnliche Integration, sei es durch eine mechanische Quadratur. Im Wesentlichen ist also die Aufgabe hiermit als gelöst zu betrachten.

Wir wollen diese Formeln jetzt auf ein einfaches Beispiel anwenden. Die Bogenmittellinie sei ein Parabelbogen, dessen Axe die Spannweite senkrecht halbirt, und die Belastung sei über die ganze Spannweite gleichförmig vertheilt, d. h. so, dass zu Bogenabschnitten von gleicher Horizontalprojection gleiche Lasten gehören. Dieser Fall hat übrigens eine allgemeinere Bedeutung, als es nach dem Wortlaute der Aufstellung scheinen könnte. Jeder flache Bogen von symmetrischer Gestalt kommt nämlich dem Parabelbogen nahe, z. B. auch ein flacher Kreisbogen. Näherungsweise kann daher jeder flache Bogen als ein Parabelbogen aufgefasst werden und man macht davon bei solchen Berechnungen mit Vorliebe Gebrauch, weil sich die Ausführung der Rechnung beim Parabelbogen am einfachsten gestaltet.

Bei gleichförmiger Belastung ist das Biegemoment M_b eines Balkens im Abstände x vom linken Auflager

$$M_b = \frac{q}{2} x^2 - \frac{qx^2}{2}$$

und die Momentenfläche ist selbst eine Parabel, die bei geeigneter Wahl des Maassstabes, in dem M_b aufgetragen wird, zum Zusammenfallen mit der Bogenmittellinie gebracht werden kann. In der Mitte geht M_b in $\frac{ql^2}{8}$ und z in die Pfeilhöhe h des Bogens über, daher kann auch überall

$$M_b = \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{z}{h}$$

gesetzt werden. Führt man dies in Gl. (120) ein, so erhält man

$$H = \frac{ql^2}{8h}, \quad (121)$$

da sich der Nenner gegen den ihm gleichen Factor des Zählers weghebt.

Mit diesen Werthen von M_b und H wird die Formänderungsarbeit A , wie aus Gl. (118) hervorgeht, zu Null. Wenn überhaupt der Werth Null für die Formänderungsarbeit bei passender Wahl der statisch unbestimmten Grösse möglich ist, entspricht er immer einem Minimum, da A niemals negativ werden kann. Wir hätten daher auch schon auf Grund dieser einfachen Ueberlegung den Werth von H bestimmen können. Zugleich werden wir aber hierdurch aufmerksam darauf, dass die Gl. (120) oder (119) nicht den genauen Werth von H liefern können, denn in der That wird eine kleine Formänderung beim Aufbringen von Lasten auf einen elastischen Körper immer eintreten und es wird also A nicht genau gleich Null sein können.

Der Grund für diesen Widerspruch liegt darin, dass wir bei der Berechnung von A nur auf die Arbeitsleistung durch die Biegemomente Rücksicht genommen haben. Um zu genaueren Resultaten zu gelangen, muss vor Allem auf die Arbeitsleistung der Normalkraft N Rücksicht genommen werden. Die Arbeit der Schubspannungen kann dagegen, wenn man auf Kleinigkeiten nicht zu achten braucht, immer noch vernachlässigt werden, und zwar mit viel grösserem Rechte als beim Balkenträger, weil beim Bogen die Schubkräfte an sich viel geringer ausfallen als beim Balken. Wenn man will, kann man indessen auch dieses Glied, gerade so wie es früher beim Balken gezeigt wurde, in Ansatz bringen; da es practisch ganz bedeutungslos ist, sehe ich aber hier davon ab.

Eine über den Querschnitt F gleichförmig vertheilte Normalspannung σ von der Grösse

$$\sigma = \frac{N}{F}$$

leistet beim Zusammendrücken des Bogenelementes ds eine Arbeit, die auf die Volumeneinheit bezogen nach Gl. (41)

$$A = \frac{\sigma^2}{2E}$$

gesetzt werden kann. Multiplicirt man dies mit dem Volumen Fds des Bogenelementes, so findet man

$$dA = \frac{\sigma^2 F}{2E} ds = \frac{N^2}{2EF} ds.$$

Nachdem diese Formänderung vollzogen ist, denken wir uns das Biegemoment zur Wirksamkeit gebracht. Dabei dreht sich der eine Querschnitt relativ zum andern und zwar nach der von mir zu Grunde gelegten Annahme über die Spannungsvertheilung um eine durch den Schwerpunkt gehende Axe. Dabei verschieben sich auch die Angriffspunkte der schon vorher angebrachten Normalspannungen $\sigma = \frac{N}{F}$ von Neuem und wir müssen zunächst berechnen, wie gross die bei dieser Drehung von ihnen geleistete Arbeit ist. Für ein Flächenelement dF im Abstände y von der Schwerlinie ist die Verschiebung des Angriffspunktes der an ihm von Anfang an wirkenden Normalspannung gleich

$$y \Delta d\varphi$$

und die gesammte Arbeitsleistung dieser Normalspannungen daher gleich

$$\int \sigma dF y \Delta d\varphi = \frac{N \Delta d\varphi}{F} \int y dF.$$

Nach der Eigenschaft der Schwerlinien ist aber das letzte Integral gleich Null. Im Ganzen genommen leisten daher die schon vorher in gleichförmiger Vertheilung aufgebrauchten Normalspannungen während der Drehung keine Arbeit; es bleiben also nur die Arbeitsleistungen der durch das Biegemoment selbst hervorgerufenen Normalspannungen bei dieser Bewegung übrig und diese sind ebenso gross, als wenn zu Beginn ihres Auftretens das Trägerelement spannungslos gewesen wäre.

Auch umgekehrt könnte man zeigen, dass die vom Biegemomente für sich hervorgerufenen Spannungen keine Arbeit mehr leisten, wenn nach ihnen die Normalkraft N angebracht wird. Jedenfalls kann also die durch das Zusammenwirken von M und N geleistete Formänderungsarbeit gleich der Summe der beiden Ausdrücke gesetzt werden, die für M

und N für sich gefunden wurden. An Stelle von Gl. (118) schreiben wir daher jetzt

$$A = \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{E\Theta} ds + \frac{1}{2} \int \frac{N^2}{EF} ds.$$

Wenn wir jetzt dieselbe Rechnung wiederholen, die zu Gl. (119) führte, erhalten wir

$$\frac{\partial A}{\partial H} = - \int \frac{M_b z}{E\Theta} ds + H \int \frac{z^2}{E\Theta} ds + \int \frac{N}{EF} \cdot \frac{\partial N}{\partial H} ds = 0.$$

Hier ist noch N als Function von H auszudrücken, was leicht geschehen kann. Um langwierige Formeln zu vermeiden, von denen man später doch keinen Gebrauch macht, weise ich darauf hin, dass bei einem sehr flachen Bogen, für den diese Rechnung hauptsächlich von Wichtigkeit ist, weil bei ihm der Horizontalschub H und daher N besonders gross ausfällt, nahezu $N = H$ gesetzt werden kann. Mit dieser Vereinfachung erhält man

$$\frac{\partial N}{\partial H} = 1$$

und die Auflösung der vorigen Gleichung liefert

$$H = \frac{\int \frac{M_b z}{E\Theta} ds}{\int \frac{z^2}{E\Theta} ds + \int \frac{ds}{EF}}. \quad (122)$$

Wenn neben E auch Θ und F als constant angesehen werden können, vereinfacht sich dies noch weiter zu

$$H = \frac{\int M_b z ds}{\int (z^2 + t^2) ds}. \quad (123)$$

Unter t ist der Trägheitshalbmesser des Querschnitts, unter t^2 also $\frac{\Theta}{F}$ zu verstehen. Der Vergleich dieser Formel mit Gl. (120) zeigt uns nun auch, welchen Einfluss die Berücksichtigung der Normalspannungen neben den Biegemomenten auf den Werth von H ausübt. So lange t klein gegen den Durchschnittswerth der Ordinaten z ist, unterscheiden sich die beiden Werthe von H nach (120) und nach (123) nur unerheblich von einander. Dieser

Fall liegt gewöhnlich vor und man kann dann unbedenklich die einfachere Formel zur Berechnung des Horizontalschubs verwenden.

§ 33. Zweites Verfahren zur Berechnung des Horizontalschubs.

Die Wichtigkeit dieser Untersuchungen für die praktischen Anwendungen macht es wünschenswerth, noch einen zweiten, von dem vorigen völlig verschiedenen Weg zur Lösung derselben Aufgabe zu kennen.

Ich denke mir den Bogen platt auf den Boden gelegt, das linke Ende festgehalten und ein Element von der Länge ds zum neuen Krümmungsradius verbogen, während alle übrigen Theile des Bogens inzwischen ihre Gestalt behalten sollen. Der rechte Theil des Bogens dreht sich dann gegen den festgehaltenen linken um den Winkel $\Delta d\varphi$ und jeder zu ihm gehörige Punkt beschreibt einen kleinen Kreisbogen von diesem Centriwinkel um den Mittelpunkt von ds . Der Radius des

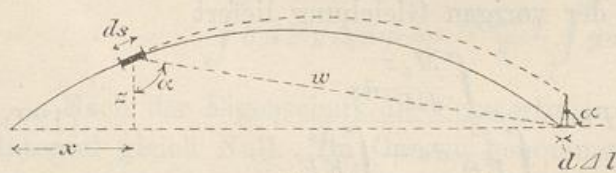


Abb. 45.

Kreisbogens, den das rechte Bogenende beschreibt, ist in Abb. 45, in der die neue Lage des rechten Bogenstücks durch eine punktirte Linie (natürlich sehr stark übertrieben) eingetragen ist, mit w bezeichnet. Die Länge des Kreisbogens ist daher gleich $w\Delta d\varphi$ zu setzen. Um nun zu erkennen, um wie viel sich die Sehne des ganzen Bogens durch die an ds vorgenommene Verbiegung vergrößert hat, denke ich mir nachträglich den ganzen Bogen ohne Formänderung um den linken Endpunkt so lange gedreht, bis der rechte Endpunkt wieder auf die frühere horizontale Linie fällt. Die beiden nacheinander erfolgten kleinen Wege des rechten Endpunktes bilden die Hypotenuse und die eine Kathete eines unendlich kleinen Dreiecks, dessen zweite Kathete die gesuchte Sehnenverlängerung $d\Delta l$ angibt. In diesem Dreiecke ist ein