Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

Träger über drei oder mehr Oeffnungen

Hat der Träger in beiden Spannweiten gegebene Lasten aufzunehmen, so ermittelt man zuerst die Momentenfläche unter der Voraussetzung, dass nur eine Spannweite belastet, die andere unbelastet sei, wiederholt dann das Verfahren für den Fall, dass die zweite Oeffnung belastet und die erste unbelastet ist und addirt beide Momentenflächen zu einander. Die dem gegebenen Belastungsfalle entsprechende Momentenfläche setzt sich daher aus zwei positiven Antheilen zusammen, von denen zu jeder Spannweite einer gehört und die ebenso gross und ebenso gestaltet sind, als wenn diese Spannweite durch einen einfachen Träger überdeckt wäre, der die zugehörigen Lasten aufzunehmen hätte, sowie aus einem negativen Antheile, der wiederum ein Dreieck ADC, wie in Abb. 154 bildet, dessen Höhe BD jedoch gleich der Summe der Höhen ist, die zur Belastung der linken und der rechten Oeffnung für sich genommen gehören.

Für einen über drei oder noch mehr Oeffnungen durchlaufenden Träger lässt sich dieselbe Construction ohne wesentliche Aenderung gleichfalls durchführen, solange nur eine der beiden Endöffnungen belastet ist. Es ist daher nicht nöthig, hierfür ein besonderes Beispiel vorzuführen. Dagegen muss noch ein Hülfsverfahren dazu treten, wenn eine der Mittelöffnungen belastet ist. In Abb. 157 ist ein über drei Oeffnungen durchgehender Träger gezeichnet, dessen Mittelöffnung BC eine gleichförmig vertheilte Belastung aufnehmen soll, während die beiden Endöffnungen als unbelastet vorausgesetzt werden. An Stelle der gleichförmig vertheilten kann übrigens auch eine irgendwie anders angeordnete Belastung der Mittelöffnung treten, ohne dass sich darum die Betrachtung zu ändern brauchte.

Man denke sich die beiden Stützen A und D entfernt und die Auflagerkräfte durch passend gewählte Lasten ersetzt, die so zu bestimmen sind, dass die Punkte A und D keine Bewegung in vertikaler Richtung ausführen. Wenn diese Kräfte von vornherein bekannt wären, könnte man die Momentenfläche mit Hülfe eines Seilpolygons sofort construiren. Jedenfalls kennt man aber aus dieser Ueberlegung bereits die allgemeine Gestalt der Momentenfläche. Die Lasten an den Enden A und D des auf B und C gestützten Trägers bringen nämlich überall negative Momente hervor, die durch das Viereck $AEFD$ in Abb. 158 dargestellt werden. Dazu kommen die positiven, durch das Parabelsegment über BC dargestellten Momente, die

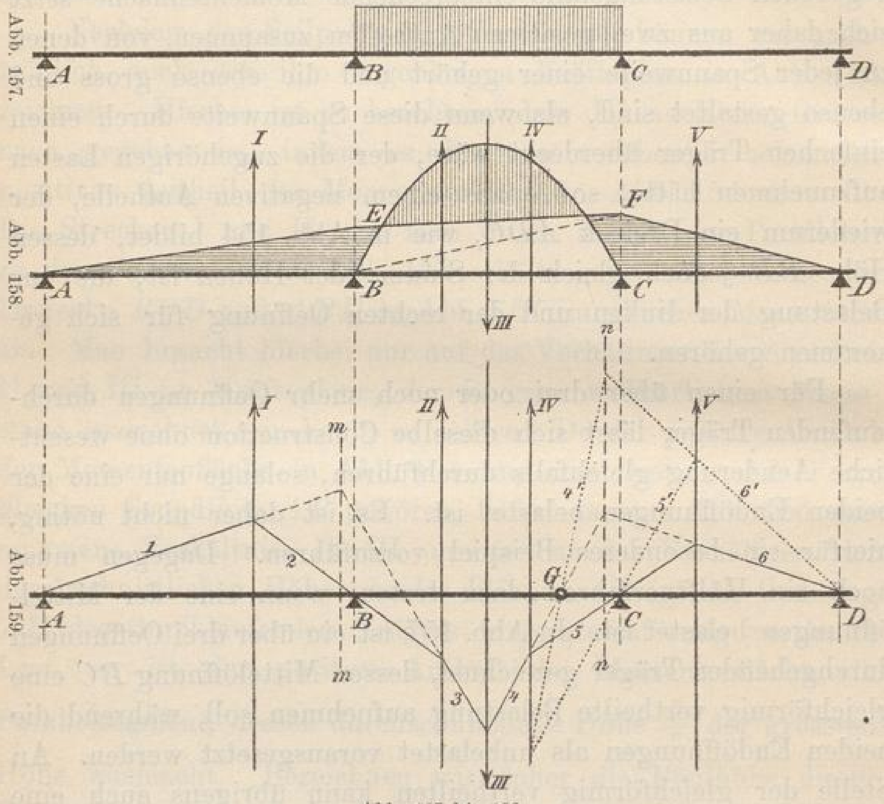

Abb. 157 bis 159.

durch die gegebenen Lasten in der Oeffnung BC unmittelbar hervorgerufen werden. Beide Momenflächen überschneiden sich wieder und die Unterschiede zwischen ihnen, die durch Schraffirung hervorgehoben sind, geben wie im früheren Falle, die im Ganzen auftretenden Biegungsmomente an. Um Abb. 158 richtig auftragen zu können, bleiben nur die Höhen BE und FC, d. h. die Momente über den Mittelstützen zu ermitteln.

Dies geschieht wieder auf Grund der Erwägung, dass die elastische Linie, die als Seilpolygon zur Momentenfläche als Belastungsfläche construirt werden kann, durch die vorgeschriebenen Punkte A, B, C, D gehen muss. Wir achten nur auf die durch diese Punkte gehenden Seilspannungen der in beliebiger Verzerrung gezeichneten Seilcurven, von denen wir wissen, dass sie mit den zwischen ihnen liegenden Lasten, die wir in geeigneter Weise zusammenfassen, im Gleichgewichte stehen müssen. Diese Lasten für das „zweite“ Seilpolygon sind in Abb. 158 eingetragen. In den beiden Endöffnungen kommt nur je eine Last in Frage, die durch den Schwerpunkt des zugehörigen Belastungsdreiecks geht. In der Mittelöffnung geht III durch den Schwerpunkt des Parabelsegments; diese Last ist von allen allein ihrer Grösse nach sofort bekannt, da sie durch die Fläche des Parabelsegments dargestellt wird. Das Trapez $BEFC$ vom negativen Antheile der Momentenfläche zerlegen wir durch die Diagonale BF in zwei Dreiecke und führen die nach oben gekehrten Lasten dieser Dreiecke gesondert ein. Wir erreichen dadurch, dass auch die Richtungslinien II und IV, die durch die Schwerpunkte der Dreiecke gehen, sofort angegeben werden können, wenn man auch die Inhalte der Dreiecke noch nicht kennt. Ebenso muss man übrigens auch verfahren, wenn eine Endöffnung belastet ist.

Wir tragen jetzt die hiermit ermittelten Richtungslinien der Lasten von I bis V in Abb. 159, die nichts mehr enthält, was noch als unbekannt anzusehen wäre, von Neuem ein. Zugleich ziehen wir die Linie mm als Richtungslinie der Resultirenden von I und II, die ebenso wie im früheren Falle gefunden wird, da sich auch jetzt die Lasten I und II oder die Dreieckflächen AEB und BEF in Abb. 158 wie die Spannweiten AB und BC zu einander verhalten müssen. Ebenso kann die Linie nn als Richtungslinie der Resultirenden aus IV und V gefunden werden, indem man den Abstand zwischen IV und V im umgekehrten Verhältnisse der Spannweiten BC und CD theilt, d. h. indem man den Abstand von C bis V von IV aus nach rechts hin aufträgt.

Wir zeichnen ferner das durch die vorgeschriebenen Punkte

A, B, C, D gehende Seilpolygon zu diesen Lasten, indem wir die Seilspannung 1 in beliebiger Richtung — entsprechend der beliebig zu wählenden Verzerrung der elastischen Linie — eintragen. Auf 1 folgen 2 und 3 sofort, da sich 1 und 3 auf mm schneiden müssen, während 2 durch B gehen muss. Die Fortsetzung 4, 5, 6 macht indessen zunächst einige Schwierigkeiten, da man vorerst nicht wissen kann, in welcher Richtung 4 weiter zu führen ist.

Man bedenke jedoch, dass die Richtungslinien von 4, 5, 6 ein Dreieck mit einander bilden müssen, das sechs vorgeschriebene Bedingungen zu erfüllen hat, wodurch es ausreichend gekennzeichnet wird. Die Seiten müssen nämlich durch drei vorgeschriebene Punkte gehen (4 durch den Schnittpunkt von 3 mit III, 5 durch C und 6 durch D) und die Ecken müssen auf drei gegebenen Graden liegen, die parallel zu einander sind, nämlich auf den Geraden IV, nn und V. Das Dreieck kann daher nach einem schon oft benutzten Verfahren ermittelt werden.

Wir zeichnen zuerst irgend ein Dreieck, das nur fünf der aufgezählten Bedingungen erfüllt. Zu diesem Zwecke ziehen wir die Linie $6'$ in beliebiger Richtung durch D und reihen daran in leicht ersichtlicher Weise die Seiten $4'$ und $5'$. Das Dreieck $4'5'6'$ erfüllt nur die eine Bedingung nicht, dass $4'$ durch den Endpunkt von 3 gehen sollte. Denkt man sich das Dreieck $4'5'6'$ veränderlich, so dass es stets dieselben fünf Bedingungen erfüllt, so muss sich die Seite $4'$ ebenfalls um einen festen Punkt drehen. Dieser Punkt G muss auf der Balkenaxe liegen, da eines der Dreiecke $4'5'6'$ mit allen Punkten und Seiten auf die Balkenaxe fällt. Punkt G ist daher als Schnittpunkt von $4'$ mit der Balkenaxe bekannt.

Auch das gesuchte Dreieck 456 bildet eines der Dreiecke $4'5'6'$ und wir wissen jetzt, dass 4 durch den Punkt G zu ziehen ist. Nachdem dies geschehen ist, macht auch die Fortsetzung 5, 6 keine Schwierigkeiten mehr.

Von den Seilpolygonseiten 1 bis 6 sind 1, 2, 5, 6 Tangenten an die in entsprechender Verzerrung aufgetragene elastische

Linie in den Auflagerpunkten, während die dazwischen eingeschobenen Seiten 3 und 4 in keiner unmittelbaren Beziehung zur elastischen Linie stehen.

Nachdem das Seilpolygon gefunden ist, kann man dazu, wie im früheren Falle, nachträglich den Kräfteplan zeichnen. Da die Last III ihrer Grösse nach bekannt ist, folgen daraus auch die Grössen der übrigen Lasten. — Hiermit findet man die Inhalte der Dreiecksflächen I, II, IV, V in Abb. 158, so dass dem richtigen Auftragen von Abb. 158 kein Hinderniss mehr im Wege steht. — Auch für den Fall, dass mehrere Oeffnungen belastet sind, kann man so verfahren, wie es schon vorher bei dem einfacheren Falle des über zwei Oeffnungen durchlaufenden Trägers auseinandergesetzt worden ist.

§ 63. **Gleichung von Clapeyron.**

Wenn jede Oeffnung des durchlaufenden Trägers nur eine gleichförmig vertheilte Belastung trägt, die aber bei den einzelnen Oeffnungen verschieden gross sein darf (und bei einigen daher auch gleich Null sein kann), erhält man die Biegungsmomente über den Stützen, die man zum Auftragen der Momentenfläche nöthig hat, auch sehr einfach auf analytischem Wege, mit Hülfe der von Clapeyron aufgestellten „Gleichung der drei Momente“.

Die Zahl der Oeffnungen kann jetzt beliebig gross sein. Wir denken uns zwei aufeinanderfolgende Oeffnungen, die wir als die n-te und die $(n+1)$-te bezeichnen, herausgegriffen. Die positiven Antheile der Momentenflächen bestehen wieder aus Parabelabschnitten, die negativen aus Trapezen. Abb. 160 gibt den zu den beiden Oeffnungen gehörigen Theil der Momentenfläche an. Die Pfeilhöhen der Parabeln sind mit B_n und B_{n+1} bezeichnet. Trägt die n-te Oeffnung eine Belastung q_n für die Längeneinheit, so hat man für das Biegungsmoment B_n, das in der Mitte dieser Oeffnung entstehen würde, wenn diese durch einen einfachen Träger überdeckt wäre,