



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

§. 63. Gleichung von Clapeyron

[urn:nbn:de:hbz:466:1-84532](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-84532)

Linie in den Auflagerpunkten, während die dazwischen eingeschobenen Seiten 3 und 4 in keiner unmittelbaren Beziehung zur elastischen Linie stehen.

Nachdem das Seilpolygon gefunden ist, kann man dazu, wie im früheren Falle, nachträglich den Kräfteplan zeichnen. Da die Last III ihrer Grösse nach bekannt ist, folgen daraus auch die Grössen der übrigen Lasten. — Hiermit findet man die Inhalte der Dreiecksflächen I, II, IV, V in Abb. 158, so dass dem richtigen Auftragen von Abb. 158 kein Hinderniss mehr im Wege steht. — Auch für den Fall, dass mehrere Oeffnungen belastet sind, kann man so verfahren, wie es schon vorher bei dem einfacheren Falle des über zwei Oeffnungen durchlaufenden Trägers auseinandergesetzt worden ist.

§ 63. Gleichung von Clapeyron.

Wenn jede Oeffnung des durchlaufenden Trägers nur eine gleichförmig vertheilte Belastung trägt, die aber bei den einzelnen Oeffnungen verschieden gross sein darf (und bei einigen daher auch gleich Null sein kann), erhält man die Biegemomente über den Stützen, die man zum Auftragen der Momentenfläche nöthig hat, auch sehr einfach auf analytischem Wege, mit Hülfe der von Clapeyron aufgestellten „Gleichung der drei Momente“.

Die Zahl der Oeffnungen kann jetzt beliebig gross sein. Wir denken uns zwei aufeinanderfolgende Oeffnungen, die wir als die n -te und die $(n + 1)$ -te bezeichnen, herausgegriffen. Die positiven Antheile der Momentenflächen bestehen wieder aus Parabelabschnitten, die negativen aus Trapezen. Abb. 160 gibt den zu den beiden Oeffnungen gehörigen Theil der Momentenfläche an. Die Pfeilhöhen der Parabeln sind mit B_n und B_{n+1} bezeichnet. Trägt die n -te Oeffnung eine Belastung q_n für die Längeneinheit, so hat man für das Biegemoment B_n , das in der Mitte dieser Oeffnung entstehen würde, wenn diese durch einen einfachen Träger überdeckt wäre,

$$B_n = \frac{q_n l_n^2}{8} \quad \text{und ebenso} \quad B_{n+1} = \frac{q_{n+1} l_{n+1}^2}{8}. \quad (86)$$

Die Momente M_n , M_{n+1} und M_{n+2} über den drei Stützen sind dagegen vorläufig unbekannt.

Im unteren Theile von Abb. 160 ist der zu den beiden Oeffnungen gehörige Abschnitt der elastischen Linie des Balkens gezeichnet. Wir wissen, dass die elastische Linie als ein Seilpolygon aufgefasst werden kann, dessen Belastungsfläche durch die Momentenfläche gebildet wird. Wie schon früher, ersetzen

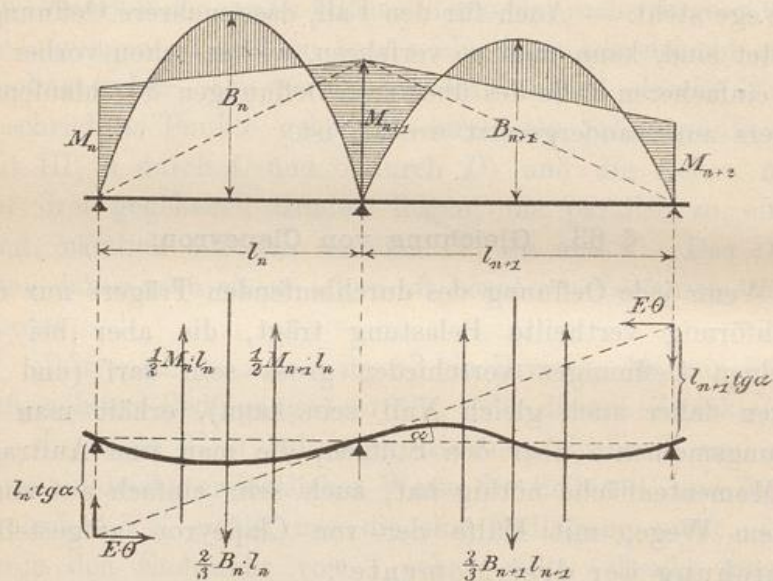


Abb. 160.

wir die zu jeder Oeffnung gehörigen Lasten durch drei Resultirende von bekannter Lage. In der n -ten Oeffnung erhalten wir die durch die Mitte der Spannweite nach abwärts gehende Belastung $\frac{2}{3} B_n l_n$, indem der Inhalt der Parabel gleich Zweidrittel von dem Produkte aus Grundlinie und Höhe ist. Freilich ist B_n nicht eigentlich selbst die Höhe der Parabel, sondern das Biegemoment, das aus der Ordinate der Momentenfläche durch Multiplikation mit dem Horizontalzuge H_I des ersten Seilpolygons gefunden wird. Wir können uns aber alle Lasten mit dem constanten Factor H_I multiplicirt denken, falls wir

dann nur auch den Horizontalzug H_{II} des zweiten Seilpolygons, der nach Gl. 27 (S. 107)

$$H_{II} = \frac{E\Theta}{H_I}$$

ist, mit H_I multipliciren, ihn also gleich $E\Theta$ setzen. — Das Trapez mit den Seiten M_n und M_{n+1} zerlegen wir in zwei Dreiecke, deren Lasten mit $\frac{1}{2} M_n l_n$ und $\frac{1}{2} M_{n+1} l_n$ anzusetzen sind. Beide gehen nach oben hin und theilen die Spannweite l_n in drei gleiche Theile. Ebenso verfahren wir in der zweiten Oeffnung.

Die durch die n -te und die $(n+1)$ -te Stütze gehenden Seilspannungen müssen mit den drei zuvor aufgeführten Lasten im Gleichgewichte stehen. Wir schreiben dafür eine Momentengleichung in Bezug auf den n -ten Stützpunkt als Momentenpunkt an. Die durch diesen Stützpunkt gehende Seilspannung fällt aus der Momentengleichung fort. Der Winkel, den die durch den $(n+1)$ -ten Stützpunkt gehende Seilspannung mit der Horizontalen bildet, sei mit α bezeichnet. Wir verlegen den Angriffspunkt dieser Seilspannung auf die durch die n -te Stütze gehende Auflagervertikale und zerlegen sie dort in eine vertikale und eine horizontale Componente. Die vertikale Componente geht durch den Momentenpunkt und tritt daher nicht in die Momentengleichung ein. Die horizontale Componente ist der vorher schon zu $E\Theta$ festgestellte Horizontalzug des zweiten Seilpolygons. Dessen Moment ist gleich $-E\Theta l_n \operatorname{tg} \alpha$. Die Momente der drei Lasten lassen sich ebenfalls sofort anschreiben und im Ganzen erhält man daher

$$\begin{aligned} -E\Theta l_n \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{2} M_n l_n \cdot \frac{l_n}{3} + \frac{2}{3} B_n l_n \cdot \frac{l_n}{2} \\ - \frac{1}{2} M_{n+1} l_n \cdot \frac{2l_n}{3} = 0. \end{aligned}$$

Eine Momentengleichung von derselben Form schreiben wir ferner auch für die $(n+1)$ -te Oeffnung und zwar in Bezug auf den $(n+2)$ -ten Stützpunkt als Momentenpunkt an. Auch hier wird wieder die durch den $(n+1)$ -ten Stützpunkt

gehende Seilspannung zum Schnitte mit der durch den Momentenpunkt gehenden Vertikalen gebracht und dort in zwei Componenten zerlegt, von denen nur die Horizontalcomponente $E\Theta$ in die Momentengleichung eintritt. Die Gleichung lautet

$$- E\Theta l_{n+1} \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{2} M_{n+2} l_{n+1} \cdot \frac{l_{n+1}}{3} - \frac{2}{3} B_{n+1} l_{n+1} \cdot \frac{l_{n+1}}{2} + \frac{1}{2} M_{n+1} l_{n+1} \cdot \frac{2l_{n+1}}{3} = 0.$$

Wir wollen beide Gleichungen, nachdem die in ihnen vorkommenden Faktoren l_n bzw. l_{n+1} weggehoben sind und mit 6 multiplicirt ist, noch einmal unter einander schreiben. Sie lauten dann

$$\left. \begin{aligned} - 6E\Theta \operatorname{tg} \alpha - M_n l_n + 2B_n l_n - 2M_{n+1} l_n &= 0, \\ - 6E\Theta \operatorname{tg} \alpha + M_{n+2} l_{n+1} - 2B_{n+1} l_{n+1} \\ &+ 2M_{n+1} l_{n+1} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

Subtrahirt man sie von einander, so heben sich die mit dem unbekanntem Winkel α behafteten Glieder gegen einander fort und nachdem man die Glieder passend geordnet hat, erhält man die Clapeyron'sche Gleichung

$$\left. \begin{aligned} M_n l_n + 2M_{n+1}(l_n + l_{n+1}) + M_{n+2} l_{n+1} \\ = 2(B_n l_n + B_{n+1} l_{n+1}). \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

Zwischen je drei aufeinanderfolgenden Stützenmomenten M_n , M_{n+1} und M_{n+2} besteht eine Gleichung von dieser Form, in der alle übrigen Grössen bekannt sind, da man für die B die dafür vorher schon aufgestellten Werthe einsetzen kann. Schreibt man alle diese Gleichungen für je zwei aufeinanderfolgende Oeffnungen an, so erhält man ebenso viele Gleichungen als unbekannte Stützenmomente. Diese lassen sich daher durch Auflösen der Gleichungen ermitteln, womit die gestellte Aufgabe gelöst ist.

Bei einem Träger, der über nur zwei Oeffnungen durchgeht, sind z. B. die Momente M_n und M_{n+2} an den Enden gleich Null zu setzen und die Gleichung der drei Momente enthält nur noch das unbekannte Moment M_{n+1} über der

Mittelstütze, das daraus sofort gefunden werden kann. Bei einem Träger über drei Oeffnungen sind nur die Momente über der zweiten und der dritten Stütze unbekannt und die Gleichung kann zweimal angeschrieben werden, einmal für die erste und zweite und das nächste Mal für die zweite und dritte Oeffnung. Bezeichnet man allgemein die Zahl der Oeffnungen mit m , so ist die Zahl der unbekanntten Stützenmomente gleich $(m - 1)$ und ebenso viele Gleichungen lassen sich auch nach der Clapeyron'schen Formel ansetzen.

Hierbei ist vorausgesetzt, dass die Enden frei aufliegen. Sollten diese eingespannt sein, so sind die zugehörigen Stützenmomente freilich nicht gleich Null zu setzen und man hat zwei Unbekannte mehr, als Gleichungen vorhanden sind. Dafür kann man aber in diesem Falle auch noch zwei neue Gleichungen angeben. Man nehme z. B. an, dass die $(n + 1)$ -te Oeffnung in Abb. 160 die letzte und der Träger über der Endstütze $(n + 2)$ eingespannt sei. Dann muss auch die zugehörige Endtangente der elastischen Linie horizontal gerichtet sein. Schreibt man daher nun noch eine Momentengleichung für den $(n + 1)$ -ten Stützpunkt an, so hebt sich das Moment der letzten Seilspannung fort und man erhält unter dieser Voraussetzung

$$-\frac{1}{2} M_{n+1} l_{n+1} \cdot \frac{l_{n+1}}{3} + \frac{2}{3} B_{n+1} l_{n+1} \cdot \frac{l_{n+1}}{2} - \frac{1}{2} M_{n+2} l_{n+1} \cdot \frac{2l_{n+1}}{3} = 0,$$

oder nach Wegheben der gemeinsamen Faktoren u. s. f.

$$M_{n+1} + 2M_{n+2} = 2B_{n+1} \quad (89)$$

und eine Gleichung von derselben Form gilt auch für die erste Oeffnung, wenn der Träger auch über der ersten Stütze eingespannt ist, nämlich

$$M_2 + 2M_1 = 2B_1. \quad (90)$$

Die Clapeyron'schen Gleichungen reichen daher in Verbindung mit diesen beiden auch bei eingespannten Enden aus, um alle unbekanntten Stützenmomente zu berechnen. Sobald

aber diese bekannt sind und die Momentenfläche mit ihrer Hülfe aufgetragen ist, kann man daraus auch alle übrigen Fragen, wie über die Grössen der Auflagerkräfte u. s. f. ohne Weiteres beantworten. Man muss sich hierzu nur erinnern, dass die Momentenfläche ein Seilpolygon zu den gegebenen Lasten und den zugehörigen Auflagerkräften bildet. Der Kräfteplan zu diesem Seilpolygone kann nachträglich gezeichnet werden und er liefert dann die Grössen der Auflagerkräfte. — Ausserdem lassen sich auch die Scheerkräfte V an jeder Stelle aus der Momentenfläche mit Hülfe der Gleichung $V = \frac{dM}{dx}$ ableiten.

Aufgaben.

37. Aufgabe. Für ein symmetrisch gestaltetes und symmetrisch belastetes Gewölbe soll eine Drucklinie eingezeichnet werden, die durch die Mitten von Scheitel- und Kämpferfuge geht.

Lösung. Die Hälfte des Gewölbequerschnitts ist in Abb. 161^a gezeichnet; AB sei die Belastungslinie und BC die Symmetrieaxe. Man ziehe durch den Anfangspunkt F der inneren Wölblinie einen lothrechten Fugenschnitt DE und theile die zwischen DE und BC liegende Belastungsfläche in eine Anzahl lothrechter Streifen von gleicher Breite. In der Abbildung sind sechs Belastungsstreifen gewählt, eine Zahl, die schon ausreicht, um die einzelnen Streifen näherungsweise als unendlich schmal betrachten zu können und die andererseits auch noch nicht so gross ist, dass dadurch die Ausführung der Zeichnung erschwert würde. Die einzelnen Streifen können genau genug als Trapeze betrachtet werden, deren Schwerpunkte aufgesucht und durch kleine Kreise hervorgehoben wurden. Die durch diese Schwerpunkte gehenden Lasten 1, 2 u. s. f. sind wegen der gleichen Breite der Streifen den mittleren Höhen proportional. Im Kräfteplane, Abb. 161^b wurden die Lasten durch $\frac{1}{6}$ der mittleren Streifenhöhe dargestellt. Hierauf wählt man einen Pol O beliebig und vereinigt die gegebenen Lasten durch das im unteren Theile von Abb. 161^a gezeichnete Seileck SS . Durch den Schnittpunkt der äussersten Seilstrahlen geht die Schwerlinie a der ganzen Belastungsfläche. Ausserdem ermittelt man auch noch die Schnittpunkte der übrigen Seilstrahlen mit dem horizontalen Anfangsstrahle und zieht durch sie die Lothrechten b, c, d, e . Man kann diese Linien als Schwerlinien jener Theile der Belastungsfläche ansehen, die vom Scheitel bis zum fünften, vierten, dritten oder zweiten Belastungsstreifen reichen.