Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

§. 59. Die Elasticitätstheorie des Tonnengewölbes

urn:nbn:de:hbz:466:1-84532

mauern sehr stark, das Gewölbe selbst im Vergleiche dazu sehr schwach zusammendrückbar wären, würde die Culmann'sche Betrachtung ebenfalls zu dem Schlusse führen, dass sich die Stützlinie nicht viel von der des kleinsten Horizontalschubes unterscheiden könne. Bei einer sorgfältig durchdachten und gut ausgeführten Construction liegt aber zu einem so verschiedenen Verhalten der Widerlagsmauern und des Wölbbogens kein Grund vor. Gewöhnlich können die Widerlager einfach als Fortsetzungen des Gewölbes bis zum Fundamente hin angesehen werden und was hier zunächst von dem Wölbbogen selbst gesagt wird, lässt sich dann sofort auch auf die aus ihm und den Widerlagsmauern bestehende ganze Construction sinngemäss übertragen.

§ 59. Die Elasticitätstheorie des Tonnengewölbes.

Die Mauersteine gehorchen zwar nicht genau dem Hooke'schen Gesetze von der Verhältnissgleichheit der elastischen Formänderungen mit den Spannungen, ebensowenig der Cement-Beton, aus dem man in neuerer Zeit häufig grosse Gewölbe herstellt. Immerhin sind bis zu den als zulässig angesehenen und daher in Aussicht zu nehmenden Spannungen die Abweichungen nicht sehr erheblich. Man darf es daher als eine recht gute Annäherung an das wirkliche Verhalten betrachten, wenn man die Theorie der Gewölbe auf die allgemeinen Lehrsätze der gewöhnlichen Elasticitätstheorie stützt. In der That haben auch Versuche, die vor einigen Jahren von dem Oesterreichischen Ing.- und Arch.-Vereine in grossem Maassstabe veranlasst wurden, eine befriedigende Uebereinstimmung zwischen dem thatsächlich beobachteten und dem auf Grund der Elasticitätstheorie berechneten Verhalten der Gewölbe ergeben.

Um nicht zu weitläufig werden zu müssen, beziehe ich mich hier auf die im dritten Bande auseinandergesetzten Lehren und zwar werde ich mich dabei des Castigliano'schen Satzes bedienen, wonach die statisch unbestimmten Grössen einer Construction solche Werthe annehmen, die die Formänderungsarbeit zu einem Minimum machen. Es wird sich also vor Allem darum handeln, einen Ausdruck für die elastische Formänderungsarbeit A aufzustellen, die in dem elastischen Bogen, als den wir das Gewölbe ansehen dürfen, in Folge der in ihm auftretenden Spannungen und Formänderungen aufgespeichert ist. Dabei mag in erster Linie angenommen werden, dass die Widerlager als vollkommen starr und unbeweglich angesehen werden dürfen, so dass auf sie keine Formänderungsarbeit entfällt. Dagegen steht es späterhin auch frei, dieselbe Betrachtung auf die ganze Construction mit Einschluss der Widerlagsmauern auszudehnen, wobei diese als Fortsetzungen des Gewölbes bis zur Fundamentsohle hin anzusehen sind.

Für irgend einen normal zur Wölbmittellinie gezogenen Fugenschnitt sei der Fugendruck mit R, der Abstand des Druckmittelpunktes von der Fugenmitte mit u bezeichnet. Die Formänderungsarbeit dA in einem Gewölbeelemente, das zum Bogenelemente ds der Wölbmittellinie gehört, setzt sich dann aus zwei Gliedern zusammen, von denen das erste dem centrisch angebracht gedachten Drucke R, das andere dem Biegungsmomente $M = Ru$ entspricht. Hierbei wird vorausgesetzt, dass die ganze Fuge an der Druckübertragung betheiligt sei. Bei jenen Gewölben, für die man genauere Rechnungen dieser Art durchführt und auf deren Grund die Gestalt und Stärke des Gewölbes bemisst, trifft dies auch stets zu. Für dA hat man dann nach den Lehren des dritten Bandes

$$dA = \frac{R^2}{2\,EF}\,ds + \frac{M^2}{2\,E\Theta}\,ds.$$

Hierin bedeutet F die Fugenfläche, die auch gleich der Fugenlänge f gesetzt werden kann, da die senkrecht zum Gewölbequerschnitte stehende Länge der Fuge gleich der Längeneinheit ist. Unter Θ ist das Trägheitsmoment der Fugenfläche oder $\frac{f^3}{12}$ und unter E der Elasticitätsmodul des Wölbmaterials zu verstehen. Im Ganzen wird daher die Formänderungsarbeit

$$A = \frac{1}{2\,E}\int\left(\frac{R^2}{f} + \frac{12\,M^2}{f^3}\right)ds, \qquad (85)$$

wobei sich das Integral auf die ganze Bogenlänge (eventuell mit Einschluss der Widerlager) zu erstrecken hat.

Die Werthe von R und M sind an jeder Stelle von der Stützlinie abhängig, die man ins Auge fasst. Für jede Stützlinie lässt sich A berechnen und der Castigliano'sche Satz lehrt, dass jene Stützlinie wirklich zur Geltung kommt, für die A zu einem Minimum wird. Wir wissen ferner, dass jede Stützlinie von drei Bestimmungsstücken abhängig ist, also z. B. von Grösse, Lage und Richtung irgend eines Fugendruckes. Denkt man sich diese Bestimmungsstücke auf irgend eine Art ausgewählt, so können alle R und M in ihnen ausgedrückt werden. Der Ausdruck für die Formänderungsarbeit A lässt sich dann vollständig auswerthen, bis auf die drei zunächst willkürlich bleibenden Bestimmungsstücke, die als die statisch unbestimmten Grössen des Problems anzusehen sind. Man differentiirt nun A partiell nach jeder dieser drei Grössen und setzt die Differentialquotienten gleich Null. Damit erhält man drei Gleichungen, deren Auflösung die drei statisch unbestimmten Grössen liefert, womit der zu erwartende Gleichgewichtszustand des Gewölbes vollständig bekannt wird.

Hiermit ist das Verfahren im Allgemeinen umschrieben. Auf die ausführliche Ausrechnung brauche ich mich hier nicht einzulassen; es genügt vielmehr, im Anschlusse an das Vorausgehende die Ableitung eines wenigstens näherungweise zutreffenden Satzes zu geben, der von Winkler aufgestellt wurde und der einen raschen Ueberblick darüber gestattet, welche Stützlinie ungefähr zu erwarten ist.

Das erste Glied in dem Ausdrucke für A ändert sich nämlich von einer Stützlinie zur anderen verhältnissmässig nur wenig. Für alle Stützlinien, die hierbei überhaupt in Frage kommen können, weichen die zu gegeben Fugen gehörigen Fugendrücke R nicht allzuviel von einander ab. Anders ist es dagegen mit dem zweiten Gliede, da die Abstände u der Druckmittelpunkte von den Fugenmitten und hiermit die Momente M bei verschiedenen Stützlinien sehr verschieden ausfallen. Dabei ist das zweite Glied, wie man aus dem Ausdrucke $M = Ru$ erkennt, der Grösse nach im Allgemeinen durchaus mit dem ersten vergleichbar. Nur bei jenen Stützlinien, die etwa überall sehr nahe an der Mittellinie verlaufen, wird das zweite Glied klein gegenüber dem ersten. Sehen wir aber von diesem Falle vorläufig ab, so wird A besonders dadurch verkleinert werden können, dass man das stark veränderliche zweite Glied möglichst klein macht, während man das wenig veränderliche erste Glied für eine erste Annäherung unbeachtet lassen kann. Bei der als wahrscheinlich in Aussicht zu nehmenden Stützlinie wird daher der Ausdruck

$$\int \frac{M^2}{f^3} ds$$

zu einem Minimum werden.

Anstatt $M = Ru$ zu setzen, wie es vorher geschehen war, kann man sich von der Fugenmitte aus eine Strecke z in lothrechter Richtung bis zur Richtungslinie von R gezogen denken und R im Endpunkte von z in eine horizontale und eine vertikale Componente zerlegen. Die horizontale Componente ist der constante Horizontalschub H des Gewölbes und deren Moment ist gleich Hz, während das Moment der Vertikalcomponente in Bezug auf den Fugenmittelpunkt verschwindet. Man hat daher auch $M = Hz$ und der Ausdruck, der zu einem Minimum werden soll, geht über in

$$H^2 \int \frac{z^2}{f^3} ds.$$

Auch der Horizontalschub H zeigt bei den verschiedenen Stützlinien, die mit einander zu vergleichen sind, keine grossen Abweichungen, während der zweite Faktor des Produkts stark veränderlich ist. Nimmt man überdies an, dass die Wölbstärke f constant sei, so wird demnach ungefähr jene Stützlinie zu Stande kommen, für die

$$\int z^2 ds$$

den möglichst kleinen Werth annimmt. Dieser Ausdruck hat aber eine einfache Bedeutung: er stellt die Summe der Quadrate der in lothrechter Richtung gemessenen Abweichungen zwischen

Bogenmittellinie und Stützlinie dar und kann geradezu als ein Maass für die gesammte Abweichung zwischen beiden Linien betrachtet werden. Wir können demnach mit Winkler den Satz aussprechen, dass unter den angegebenen Voraussetzungen jene Stützlinie nahezu die richtige ist, die sich der Bogenmittellinie so eng als möglich anschliesst.

Gewöhnlich nimmt man freilich die Wölbstärke f nicht constant an, sondern macht sie im Scheitel am kleinsten und lässt sie von da aus nach den Kämpfern hin etwas zunehmen, weil auch der Fugendruck R in dieser Richtung hin zunimmt. Bezeichnet man die Horizontalprojektion des Bogenelementes ds mit dx, so nimmt für gleiche dx auch ds vom Scheitel nach den Kämpfern hin zu. Für den Fall, dass sich f^3 gerade proportional mit $\frac{ds}{dx}$ ändert, dass also

$$f^3 = f_0^3 \frac{ds}{dx}$$

ist, wenn f_0 die Scheitelstärke bezeichnet, erhält man für den Ausdruck, der zu einem Minimum werden soll,

$$\frac{H^2}{f_0^3} \int z^2 dx,$$

d. h., da H nicht merklich veränderlich und f_0 constant ist, muss

$$\int z^2 dx$$

möglichst klein werden und auch dieses Resultat kann ähnlich gedeutet werden, wie das vorhergehende.

Wird die Mittellinie des Bogens so gewählt, dass sie selbst mit einem zur Belastungsfläche gehörigen Seilpolygone zusammenfällt, also eine der statisch möglichen Stützlinien darstellt, so kann sich nach den vorausgehenden Betrachtungen die wahre Stützlinie nicht viel von der Mittellinie entfernen. Für die Mittellinie selbst als Stützlinie wird nämlich $\int z^2 ds$ oder auch $\int z^2 dx$ zu Null und daher zu einem Minimum, da sich beide Integrale aus lauter positiven Gliedern zusammensetzen und daher niemals negativ werden können. Man darf daraus nun freilich nicht schliessen, dass die wahre Stützlinie unter den bezeichneten Umständen genau mit der Mittellinie zusammenfalle. Bei den in nächster Nähe der Mittellinie verlaufenden Stützlinien wird nämlich das zweite Glied in dem Ausdrucke für die Formänderungsarbeit

$$A = \frac{1}{2E}\int\left(\frac{R^2}{f} + \frac{12\,M^2}{f^3}\right) ds$$

überhaupt sehr klein und es kommt dann wesentlich auf die, wenn auch an sich nicht sehr erheblichen, Aenderungen des alsdann viel grösseren ersten Gliedes an. Man kann auch leicht sagen, in welchem Sinne eine Abweichung der wahren Stützlinie von der Mittellinie in diesem Falle zu erwarten ist. Je steiler nämlich die Stützlinie verläuft, um so kleiner wird der Horizontalschub H und mit ihm auch jedes R. Die Abweichung wird also nach der Richtung der Drucklinie des kleinsten Horizontalschubs hin erfolgen. Sehr gross kann aber diese Abweichung andererseits niemals werden, weil sich sonst sofort ein starkes Anwachsen des zweiten Gliedes in dem Ausdrucke für A herausstellen müsste, das weit mehr ausmachte, als die Verkleinerung, deren das erste Glied fähig ist.

Diese Betrachtung liefert das für die praktische Beurtheilung des Gewölbegleichgewichts sehr werthvolle Resultat, dass die elastischen Formänderungen des Gewölbes in Folge der Belastung die Stützlinie so verschieben, dass sie sich ziemlich eng an die Mittellinie anschliesst, so weit dies durch die Gestalt des Gewölbes ermöglicht ist. Zugleich lehrt sie, dass es vortheilhaft ist, die Gestalt der Wölbmittellinie, deren Wahl dem Constructeur häufig frei steht, so zu bestimmen, dass sie mit einer Seilcurve für die Belastungsfläche zusammenfällt.

§ 60. Vereinfachte Berechnung der Gewölbe.

Die genauere Berechnung der Gewölbe auf Grund der Elasticitätstheorie, die vorher nur in allgemeinen Umrissen beschrieben wurde, macht ziemlich viel Mühe und lohnt sich