



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

§. 55. Gleichgewichtsbedingungen für das Tonnengewölbe

[urn:nbn:de:hbz:466:1-84532](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-84532)

Siebenter Abschnitt.

Theorie der Gewölbe und der durchlaufenden Träger.

§ 55. Gleichgewichtsbedingungen für das Tonnengewölbe.

Die einfachste Gewölbeform, mit deren Stabilitätsuntersuchung man sich in der graphischen Statik vor Allem zu befassen hat, ist das cylindrische oder Tonnen-Gewölbe. Bei gewölbten Brücken kommt es allein in Frage und auch im Hochbaue spielt es eine wichtige Rolle, zumal da sich manche der verwickelteren Gewölbeformen, namentlich die Kreuzgewölbe, auf jene Grundform zurückführen lassen. Nur die Kuppelgewölbe und die ihnen verwandten Klostergewölbe erfordern eine grundsätzlich verschiedene Behandlung, worauf in der Folge noch kurz eingegangen werden soll. Bei den hier durchzuführenden Betrachtungen soll in erster Linie an das Gleichgewicht eines Brückengewölbes gedacht werden, obschon natürlich für die übrigen Verwendungsarten des Tonnengewölbes ganz Aehnliches gilt.

Von der Last, die das Gewölbe zu tragen hat, nehme ich an, dass sie in der Richtung der Gewölbeaxe gleichförmig vertheilt sei, während sie im Gewölbequerschnitte beliebig vertheilt sein kann. Es ist dann gleichgültig, wie lang das Gewölbe in der Richtung der Gewölbeaxe sich ausdehnt, da sich jeder zwischen zwei aufeinanderfolgenden Querschnitten liegende Abschnitt unter denselben Bedingungen befindet, wie ein anderer. Es genügt daher im Allgemeinen, einen einzigen Querschnitt zur Betrachtung auszuwählen; auf Ausnahmen, die gelegentlich

vorkommen können, werde ich späterhin noch aufmerksam machen.

Die von dem Gewölbe aufzunehmende Last besteht gewöhnlich aus einer Erdüberschüttung oder einer Uebermauerung. Denkt man sich das Gewölbe, namentlich in dem zuletzt genannten Falle fortgenommen, so ist es nicht unmöglich, dass sich die Last trotzdem selbst noch trägt, da sich auch die Uebermauerung selbst wie ein Gewölbe verhalten kann. Wenn nun auch bei den Fällen, die wir in erster Linie im Auge haben, also bei weitgespannten Brückengewölben, eine so grosse Tragfähigkeit der Uebermauerung oder Ueberschüttung nicht anzunehmen ist, so vermag sie doch immerhin bis zu einem gewissen Grade eine Entlastung des Gewölbes herbeizuführen. Auf diesen günstigen Umstand nimmt man jedoch bei der Berechnung des Gewölbes keine Rücksicht; man nimmt vielmehr an, dass die Last ohne inneren Zusammenhang sei und keine horizontalen Kräfte übertrage, so dass jeder Theil der Rückenfläche des Gewölbes das senkrecht nach abwärts gerichtete Gewicht des gerade über ihm befindlichen Theiles der Belastung aufzunehmen habe. Dazu kommt dann noch das Eigengewicht des Gewölbes selbst.

Wenn die Last aus einer Uebermauerung von demselben, specifischen Gewichte wie der Wölbbogen besteht, gibt demnach die Höhe der Uebermauerung an jeder Stelle ohne Weiteres ein Maass für die dort auftretende Belastung an. Im anderen Falle, also etwa bei einer Erdüberschüttung, kann man sich diese durch eine gleich schwere Uebermauerung von entsprechend geänderter Höhe ersetzt denken. Auch die beweglichen Lasten, die bei einem Brückengewölbe vorkommen die aber in der Regel gegenüber der viel grösseren Eigenlast keine grosse Rolle spielen, denkt man sich durch eine gleich schwere zusätzliche Uebermauerung in entsprechender Vertheilung ersetzt. Man erhält dann im Gewölbequerschnitte eine auf Mauerlasten zurückgeführte Fläche, deren obere Begrenzung die Belastungslinie heisst. Diese und die Gewölbeform seien gegeben; es handelt sich dann um die Ent-

scheidung der Frage, ob das Gewölbe unter den gegebenen Umständen im Gleichgewichte bleiben wird oder ob ein Einsturz zu befürchten ist.

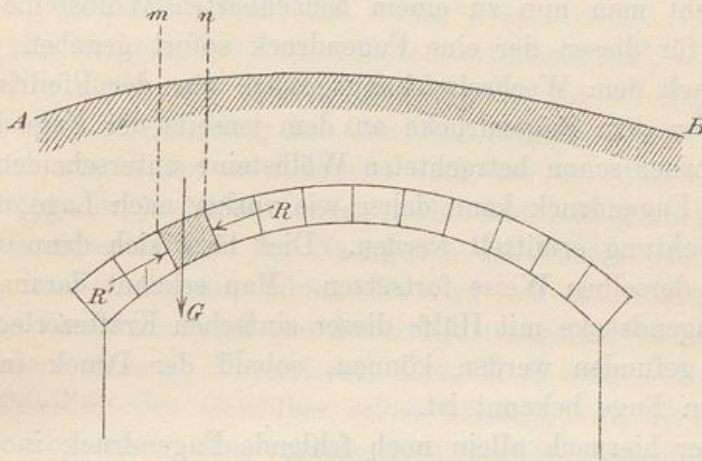


Abb. 150.

In Abb. 150 ist der Gewölbequerschnitt nebst der Belastungslinie AB gezeichnet. Man fasse einen einzelnen Wölbstein ins Auge, der in der Figur durch Schraffirung hervorgehoben ist. An diesem wirkt zunächst das Gewicht der zwischen den Linien m und n liegenden Lasten sammt dem Eigengewichte des Wölbsteins. Dieses Gewicht G ist dem Inhalte der zwischen den Linien m und n und den beiden Wölbjungen liegenden Fläche proportional und geht durch den Schwerpunkt der Fläche; es ist daher als vollständig gegeben anzusehen. Ausserdem greifen an dem Wölbsteine die in den beiden Fugen übertragenen Kräfte R und R_1 an. Diese vertheilen sich zwar entweder über die ganze Fuge oder doch über einen Theil derselben; wir können sie uns aber zu den Resultirenden R und R_1 zusammengefasst denken. Ueber Lage, Grösse und Richtung der Fugendrucke R und R_1 ist zwar zunächst nichts bekannt. Offenbar könnten wir aber die andere sofort angeben, wenn eine von ihnen auf irgend eine Art bereits ermittelt wäre. Denn die drei Kräfte G , R und R_1 müssen sich, damit Gleichgewicht bestehe, in demselben Punkte schneiden und ihre geometrische Summe muss Null

sein. Die erste Bedingung liefert die Lage, die andere nach Zeichnen eines Kräftedreiecks Grösse und Richtung von R_1 , wenn R als bekannt angesehen wird.

Geht man nun zu einem benachbarten Wölbsteine über, so ist für diesen der eine Fugendruck sofort gegeben, da er sich nach dem Wechselwirkungsgesetze nur der Pfeilrichtung nach von dem Fugendrucke an dem jenseits der Fuge liegenden, vorher schon betrachteten Wölbsteine unterscheidet. Der andere Fugendruck kann daher wie vorher nach Lage, Grösse und Richtung ermittelt werden. Dies lässt sich dann weiterhin in derselben Weise fortsetzen. Man erkennt daraus, dass alle Fugendrucke mit Hülfe dieser einfachen Kräftezerlegungen sofort gefunden werden können, sobald der Druck in einer einzigen Fuge bekannt ist.

Der hiernach allein noch fehlende Fugendruck in irgend einer Fuge, die zum Ausgange gewählt wird, lässt sich dagegen durch blosse Gleichgewichtsbetrachtungen nicht ermitteln. Das Gewölbe ist vielmehr eine statisch unbestimmte Construction und zwar eine dreifach statisch unbestimmte, da drei — auf verschiedene Art zu wählende — Bestimmungsstücke erforderlich sind, um Lage, Grösse und Richtung irgend eines Fugendruckes näher zu bezeichnen.

Falls das Gewölbe überhaupt stabil ist, sind sehr viele Gleichgewichtszustände statisch möglich. Jeder zulässigen, sonst aber beliebigen Wahl für den ersten Fugendruck entspricht ein anderer Gleichgewichtszustand. Zulässig ist dabei freilich nur eine solche Wahl, bei der überhaupt Gleichgewicht bestehen kann, worauf sofort noch näher einzugehen sein wird. Jedenfalls muss, wenn der Einsturz nicht erfolgen soll, mindestens eine Annahme für den ersten Fugendruck möglich sein, die das Gleichgewicht sichert. Ein Gewölbe, bei dem nur ein einziger Gleichgewichtszustand möglich wäre, sieht man aber nicht als hinreichend sicher an, umsomehr als jede Gewissheit darüber fehlt, dass dieser eine Gleichgewichtszustand dann auch wirklich zu Stande käme. Man verlangt vielmehr einen gewissen Ueberschuss an Standsicherheit, so dass innerhalb

eines nicht zu kleinen Bereiches verschiedene Gleichgewichtszustände statisch möglich sind.

Um die Frage zu beantworten, ob ein Gewölbe für eine beliebig getroffene Wahl des ersten Fugendruckes und nachdem alle übrigen, die dazu gehören, ermittelt sind, im Gleichgewichte bleibt oder nicht, müssen wir uns überlegen, auf welche Art der Einsturz des Gewölbes erfolgen kann. Hierbei ist nun vor Allem zu betonen, dass bei der überwiegenden Mehrzahl der ja leider immer noch recht häufig vorkommenden Gewölbeeinstürze das Nachgeben der Pfeiler oder Widerlager die Veranlassung bildet. Es wird sich später zeigen, auf welche Weise man sich von dieser Einsturzgefahr Rechenschaft zu geben vermag. Vorerst soll aber, da es sich jetzt nur um die Stabilität des Gewölbes selbst handelt, von diesem Umstande abgesehen, also vorausgesetzt werden, dass die Widerlagsmauern hinreichend standfest sind.

Dann kommt ferner in Betracht, dass der Einsturz etwa durch ein Gleiten der Wölbsteine übereinander längs der Fugen eingeleitet werden könnte. Coulomb, der bekannte Physiker, der sich, soweit beglaubigte Nachrichten vorliegen*), zuerst mit der Frage des Gewölbegleichgewichts beschäftigt hat, sah diese Einsturzgefahr als die wesentlichste an. Sie lässt sich aber durch einen geeigneten Fugenschnitt stets leicht vermeiden. Ein Gleiten der Wölbsteine übereinander kann nämlich offenbar nur dann eintreten, wenn der Fugendruck mit der Normalen zur Fuge einen Winkel einschliesst, der den Reibungswinkel übersteigt. Der Reibungswinkel zwischen Stein und Stein ist sehr gross. Wenn ein weicher Mörtel dazwischen liegt, kann er freilich erheblich kleiner werden; aber auch dann ist er immer noch ausreichend, um ein Gleiten zu verhüten, wenn

*) Manche nehmen freilich an, dass sich schon die Baumeister der Gothik eine (von ihnen geheim gehaltene) zutreffende Anschauung über die Gleichgewichtsbedingungen der Gewölbe zurecht gelegt hätten, so z. B. Baurath Hasak in einem Vortrage, der in der Zeitschr. f. Arch. und Ingenieurwesen, Wochenausgabe, 1900, S. 246 auszugsweise abgedruckt ist.

die Fugenrichtungen einigermaassen zweckmässig gewählt werden. Thatsächlich ist daher die Gleitgefahr, wenn sie auch immerhin im Auge behalten werden muss, von viel geringerer Bedeutung, als man ursprünglich annahm und auch jetzt noch manchmal von Leuten, die sich mit dem Gegenstande nicht näher beschäftigt haben, versichern hört.

Eine andere Einsturzmöglichkeit besteht darin, dass das Gewölbe durch Oeffnen einiger Fugen (der sogenannten Bruchfugen) in mehrere Theile zerfällt, die sich um die Kanten der Bruchfugen abwechselnd nach entgegengesetzten Richtungen hin drehen. Wenn diese Bewegungen weit genug fortgesetzt werden, weichen einzelne Theile so weit nach oben hin aus, dass die anderen Raum zum Herabstürzen erlangen. Hierbei ist zu beachten, dass die Zug- oder Haftfestigkeit des Mörtels, die vor dem Oeffnen der Fugen überwunden werden muss, in vielen Fällen nur gering zu veranschlagen ist. Ein guter Cementmörtel hat zwar eine nicht zu unterschätzende Zugfestigkeit, sobald er genügend erhärtet ist. Man verlässt sich darauf aber nicht gern und fordert, dass das Gleichgewicht des Gewölbes auch schon ohne Zuhülfenahme der Zugfestigkeit des Mörtels genügend gesichert sei. Für diesen Fall lässt sich die Bedingung für das Gleichgewicht gegen Drehen benachbarter Wölbsteine gegeneinander um eine Fugenkante leicht angeben. Der Angriffspunkt des Fugendruckes muss nämlich auf der Fuge selbst enthalten sein und darf nicht in deren Verlängerung fallen. Denn in die Verlängerung der Fuge könnte er offenbar nur dann fallen, wenn in der Fuge auch Zugkräfte übertragen würden.

Bei dieser Betrachtung ist jedoch noch keine Rücksicht auf die begrenzte Druckfestigkeit des Wölbmaterials genommen und diese ist es, die nun thatsächlich den Ausschlag gibt. Schon dann, wenn der Angriffspunkt des Fugendruckes in die Nähe einer Fugenkante fällt, steigt die Druckbeanspruchung an dieser Kante so erheblich, dass dort ein Zertrümmern des Wölbmaterials stattfindet. Nachdem dieses Absplittern der Kanten erfolgt ist, steht den vorher besprochenen Drehungen

der einzelnen Wölbtheile gegen einander kein Hinderniss mehr im Wege, obschon der Angriffspunkt des Fugendruckes noch innerhalb der ursprünglichen Fugenlänge liegt. Man muss daher verlangen, dass der Fugendruck nicht nur an keiner Stelle über den Gewölbequerschnitt hinaustritt, sondern dass er sich auch den Begrenzungslinien des Gewölbes nirgends so weit nähert, dass die zulässige Druckbeanspruchung des Wölbmaterials überschritten wird. Als statisch möglich im vorhererörterten Sinne sind daher nur solche Gleichgewichtszustände des Gewölbes anzusehen, die dieser Forderung genügen und bei denen überdies an keiner Stelle ein Gleiten der Wölbsteine gegen einander zu befürchten ist.

Die grösste Kantenpressung, die zu einem gegebenen Fugendrucke gehört, kann unter der hier wie in anderen Fällen üblichen Annahme eines linearen Spannungsvertheilungsgesetzes leicht ermittelt werden. Der Fugendruck (oder seine zur Fugenrichtung senkrecht stehende Componente, die sich aber von dem gesammten Fugendrucke unter den gegebenen Verhältnissen nur unerheblich unterscheiden kann) sei für die Länge = 1 des Gewölbes im Sinne der Axe, d. h. senkrecht zum Querschnitte gemessen, mit R , die Fugenlänge mit f und der Abstand des Druckmittelpunktes (oder Angriffspunktes von R) von der Fugenmitte mit u bezeichnet. Dann ist die Kantenpressung σ

$$\sigma = \frac{R}{f} \pm \frac{6Ru}{f^2} \quad (82)$$

zu setzen. Dies ist nämlich die früher (im ersten Bande) abgeleitete Formel für die excentrische Druckbelastung. Das erste Glied stellt die von dem centrisch angebrachten Drucke herrührende, gleichförmig vertheilte Spannung, das zweite Glied die zu dem Momente Ru gehörige zusätzliche Biegespannung dar, wobei zu beachten ist, dass das Widerstandsmoment der Fuge gleich $\frac{f^2}{6}$ zu setzen ist, da die Fuge ein Rechteck von den Seitenlängen f und 1 bildet. Das obere oder untere Vorzeichen des zweiten Gliedes ist zu wählen, jenachdem die dem Druckmittelpunkte benachbarte oder die

jenseits der Mitte liegende Kante in Frage kommt. Die grösste Kantenpressung entspricht natürlich dem positiven Vorzeichen.

Die Formel ist indessen nur so lange gültig, als sich die ganze Fuge an der Lastübertragung beteiligt. Setzt man $u = \frac{f}{6}$, so sinkt der Druck an der jenseits liegenden Kante auf Null und wenn u noch grösser wird, treten an dieser Kante Zugspannungen auf. Vermag der Mörtel Zugspannungen aufzunehmen, so ist die Formel zwar auch dann noch gültig. Im anderen Falle tritt aber auf der Zugseite ein Aufklaffen der Fuge ein. Das Spannungsvertheilungsdiagramm geht dann in ein Dreieck über, das sich nur über den unter Druck stehenden Theil der Fuge erstreckt und dessen Schwerpunkt auf der Richtungslinie von R liegt. Der Abstand von R bis zur Kante ist $\frac{f}{2} - u$, die an der Druckübertragung beteiligte Strecke der Fuge das Dreifache davon und die Kantenpressung wird doppelt so gross, als der Mittelwerth des Druckes längs jener Strecke. Daher ist die vorige Gleichung für diesen Fall zu ersetzen durch

$$\sigma = 2 \cdot \frac{R}{3 \left(\frac{f}{2} - u \right)}. \quad (83)$$

Was die Dimensionen der in diesen Gleichungen vorkommenden Grössen anbelangt, so ist zunächst daran zu erinnern, dass R einen Fugendruck für die Längeneinheit der Gewölbelänge bedeutete, also die Dimension kg/cm oder kg/m hat. Häufig benutzt man aber anstatt dessen andere Einheiten. Es zeigte sich nämlich vorher schon, dass die Lasten des Gewölbes durch Flächen im Gewölbequerschnitte zur Darstellung gelangen. Diese Flächen lassen sich zwar, sobald es gewünscht wird, sofort auch auf die zugehörigen Gewichte umrechnen. Man kann aber auch dabei stehen bleiben und findet dann auch R in einem Flächeninhalte ausgedrückt. Setzt man es mit dieser Benennung in die Formeln ein, so erhält man σ als eine Länge. Diese Länge gibt die „Druckhöhe“ an. Es ist dies jene Uebermauerungshöhe bei einem mit constantem Querschnitte

in die Höhe geführten Pfeiler, die unten dieselbe Druckbeanspruchung der Fuge bewirkt, wie das berechnete σ . Auch die zulässige Kantenpressung kann anstatt in atm in einer solchen Druckhöhe angegeben werden und man erspart sich, wenn man dies von vornherein so einführt, später weitere Umrechnungen.

§ 56. Stützlinie und Drucklinie.

Eine gebrochene Linie, die die Druckmittelpunkte aller Fugen mit einander verbindet, wird als Stützlinie des Gewölbes bezeichnet. Da die Vertheilung und die Zahl der Fugen offenbar zufällig und unwesentlich ist, kann man sich auch unendlich viele Fugen oder wenigstens willkürlich durch die Wölbsteine in der Fugenrichtung gezogene „Fugenschnitte“ vorstellen und zu jedem dieser Fugenschnitte den Druckmittelpunkt aufgesucht denken. Die Stützlinie geht dann in eine Curve über. Nach dem, was wir vorher sahen, muss die Stützlinie überall in der Querschnittsfläche verlaufen und sie darf den Begrenzungslinien des Gewölbequerschnitts nicht zu nahe kommen, wenn sie einem möglichen Gleichgewichtszustande entsprechen soll.

Eine zweite Curve, die von der Stützlinie im Allgemeinen etwas, wenn auch gewöhnlich nicht viel verschieden ist, wird von den Richtungslinien der zu allen Fugenschnitten gehörigen Fugendrucke als Tangenten eingehüllt. Sie wird als die Drucklinie des Gewölbes bezeichnet. Indessen werden die Bezeichnungen „Stützlinie“ und „Drucklinie“ häufig auch mit einander vertauscht, um so mehr als beide unter einer Annahme, die sofort näher zu besprechen ist, mit einander zusammenfallen.

Die Construction der Stützlinie oder der Drucklinie macht nach den Betrachtungen des vorigen Paragraphen gar keine Schwierigkeiten, sobald Lage, Richtung und Grösse irgend eines Fugendruckes willkürlich gewählt oder gegeben sind: Man sucht aber diese Aufgabe dadurch noch weiter zu vereinfachen, dass man die Richtungen der Fugenschnitte so legt, wie es dafür am bequemsten ist. Am schnellsten kommt man zum Ziele